工業力学 中間テスト　模範解答・解説

担当： 茨城大学 工学部 機械システム工学科　井上 康介

2024/11/18 10:35〜12:10 **実施**

設 問

1. 以下の文章の空欄に入る言葉・数式を記せ.
   - 力の働く点を (1：**着力点**) といい，これを通り力の方向に伸びる直線をその力の (2：**作用線**) という.
   - 2 つ以上の力を，それらと同じ働きをする 1 つの力に合成したものを (3：**合力**) という.
   - 物体を回転させる力の作用を力の (4：**モーメント**) という．ある点まわりの (4：モーメント) を N とするとき，力の大きさを F，力の (2：作用線) とその点との距離を d とすると，N の大きさは (5：Fd) と計算できる．その値の正負は，時計回りの回転のとき (6：**負**) である．なお，d のことを (7：**モーメントの腕，モーメントアーム**) という.
   - 大きさが等しく向きが反対の平行力を (8：**偶力**) といい，(8：偶力) は物体を移動させないが回転させる効果を持つ.
   - 物体同士が摩擦のないなめらかな接触をしているとき，接触点において物体同士が及ぼす力の方向は (9：**接触面に垂直**) である.
   - 内部構造を有する物体のモデルに (10：**トラス**) がある．(10：トラス) は，棒状の (11：**部材，メンバ**) とそれをつなぐ回転自由なピンとしての (12：**節点，ジョイント**) から構成され，各 (11：部材) は相対運動できない．(10：トラス) 内部に働く内力は (11：部材) が受ける引張力・圧縮力として計算されるが，これを求める方法の一つとして，各 (12：節点) が受けている力のつりあいに基づいて，(12：節点) ごとに力を求めていく方法を (13：**節点法**) という.
   - 物体の各部位が受けている重力の合力は，物体を傾けても物体上の定点を通る．この点を (14：**重心**) という．物体上の微小部位の位置を $\boldsymbol{x}$ (ベクルなので太字)，その微小質量を dm とするとき，物体全体の (14：重心) は，積分の計算を用いて (15：$\int \boldsymbol{x}dm/\int dm$) のように計算される.
   - 質量が m_1，(14：重心) の座標が $\boldsymbol{x}_1$ の物体から一部を除去するとき，除去した部分の質量が m_2，その (14：重心) の座標が $\boldsymbol{x}_2$ であったとすると，除去後の (14：重心) は (16：$(m_1\boldsymbol{x}_1 - m_2\boldsymbol{x}_2)/(m_1 - m_2)$) と計算される.
   - 地面に置かれた物体を少し傾けたとき，物体の (14：重心) の高さが下がったとすると，その物体の安定性を (17：**不安定 (のすわり)**) という.
   - 並進運動に関する慣性が質量であるのに対し，回転運動に関する慣性は (18：**慣性モーメント**) と呼ばれる．ある回転軸について，物体上の微小部位と回転軸との距離が r，微小部位のもつ微小質量が dm であるとき，その回転軸まわりの物体の (18：慣性モーメント) は積分の計算によって (19：$\int r^2dm$) と計算される.
   - 物体の (14：重心) を通る回転軸まわりの物体の (18：慣性モーメント) が I_{G} であるとするとき，この回転軸から距離 d 離れた平行な回転軸まわりの (18：慣性モーメント) は (20：$I_{\mathrm{G}} + d^2m$) と計算される．これを表す定理を (21：**平行軸の定理**) という.
   - 物体に作用する力の (4：モーメント) のうち，ある回転軸周りの回転に対して有

効な成分のことを (**22：トルク**) という．物体の (18：慣性モーメント) が I，作用している (22：トルク) が N，物体の角加速度が $\dot{\omega}$ であるとき，これら 3 つの物理量の間には (**23：$N = I\dot{\omega}$**) の式に表される関係がある．この式を (**24：角運動方程式，Euler の運動方程式**) という．

2. Fig.1 に示すように，長さ 20.0 [cm]，質量 800 [g] の細長い棒の一端を鉛直な壁面上の回転自由なジョイントに固定し，他端を天井につけたワイヤにつなげたところ，棒は水平より 30° 下がった姿勢となり，ワイヤと棒は垂直となった．
   (1) 棒に作用する力をもれなく図示せよ．力の中には，あらかじめ方向が分かっている力と分かっていない力があることに注意せよ．
   (2) 棒がジョイントから受ける反力およびワイヤ張力を求めよ．

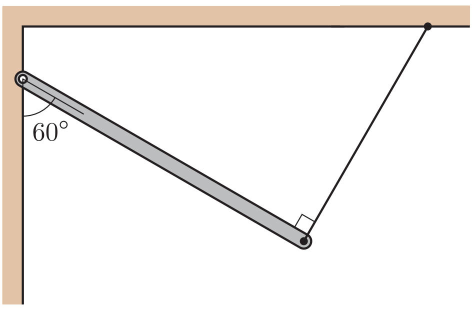

Fig.1

考え方　剛体のつりあいでは，剛体に作用しているすべての力および力のモーメントについて，それらを合計するとゼロになっているという条件を用いる．

棒に作用する力は Fig.2 に示すとおり，棒重心 (つまり中点) で鉛直下に作用する重力 $m\boldsymbol{g}$，ジョイントにおいて受ける反力 $\boldsymbol{R}$，およびワイヤに引かれる力 (ワイヤ張力) $\boldsymbol{T}$ である．ワイヤ張力はワイヤ方向であると分かっているが，ジョイント反力は大きさも方向も未知であるから $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)^{\mathrm{T}}$ などとおく．

次に，「力のつりあい (2 方向)」および「力のモーメントのつりあい」を定式化する．力のつりあいについては，水平・鉛直方向に棒が受ける力の合計がゼロであるという式をたてる．モーメントのつりあいにおいては，モーメントの基準点はどこにおいてもよいので，計算が楽になる点を選ぶ．今回は，ジョイントで受ける反力 $\boldsymbol{R}$ が 2 つの未知数 R_x, R_y を含むので，$\boldsymbol{R}$ をモーメントのつりあい式から消してしまうことを考えて，ジョイントまわりのモーメントを考慮するのがよい．

$\boldsymbol{T}$ によるジョイントまわりの力のモーメントの計算では，$\boldsymbol{T}$ が棒に直行していることから，Tl と計算すればよい．

解答例　水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとるとき，Fig.2 に示すとおり，棒が受ける力は，棒の重心 (中点) において鉛直下向きに受ける重力 $m\boldsymbol{g}$，ジョイントにおいて受ける反力 $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)^{\mathrm{T}}$，およびワイヤから受けるワイヤ張力 $\boldsymbol{T}$ である．

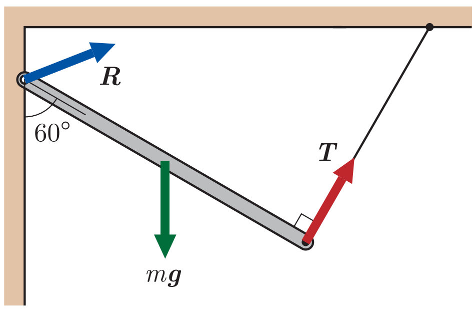

Fig.2

棒はつりあっているので，以下のつりあい条件式が成り立つ．

まず水平方向の力のつりあいから，

$$T\cos 60^\circ + R_x = 0. \tag{2.1}$$

鉛直方向の力のつりあいから，

$$T\sin 60^\circ + R_y - mg = 0. \tag{2.2}$$

ジョイントまわりのモーメントのつりあいから，

$$Tl - mg \cdot \frac{l}{2}\sin 60^\circ = 0. \tag{2.3}$$

式 (2.3) より

$$T = \frac{1}{2}mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}mg \approx 3.46 \text{ [N]}.$$

式 (2.1) に代入して，$R_x = -T/2 = -(\sqrt{3}/8)mg \approx -1.73$ [N]．式 (2.2) から $R_y = (5/8)mg \approx 5.00$ [N].

3. **問題** Fig.3 のように直径 20.0 [mm], 質量 40.0 [g] の半球の上に 1 円玉を 1 枚ずつ乗せていくとき, 何枚目を乗せた時点で不安定のすわりとなるか．ただし，1 円玉の直径は 20.0 [mm]，厚みは 1.50 [mm]，質量は 1.00 [g] とする．また，半径 r の半球の重心はその中心から $3r/8$ の距離にある．

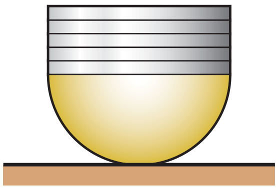

Fig.3

解答例 不安定のすわりとなり転倒するまでの間，上に乗った 1 円玉と半球は互いに固定されているとみなせるため，これを 1 つの結合体とみなすことができる．この結合体の重心 G が半球の中心 O より下であれば安定の座りである．

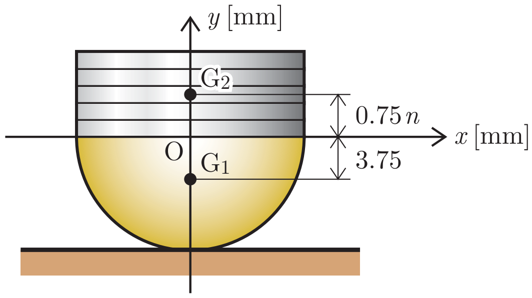

Fig.4

半球の中心 O を原点として Fig.4 のように座標軸を取るとき，半球の重心 G_1 の y 座標は $y_{\mathrm{G}_1} = -10 \cdot (3/8) = -3.75$ [mm] である．

一方, 1 円玉を n 枚乗せたとき, この積まれた 1 円玉の重心 G_2 の y 座標は $y_{\mathrm{G}_2} = 1.50n/2 = 0.750n$ [mm] である．n 枚の 1 円玉の質量は n [g] である．

以上から，全体の重心 G の y 座標は,

$$y_{\mathrm{G}} = \frac{n \cdot 0.750n + 40.0 \cdot (-3.75)}{n + 40.0} = \frac{\frac{3}{4}n^2 - 150}{n + 40.0}.$$

安定のすわりとなるための条件は $y_{\mathrm{G}} < 0$ であり，上式の分母は常に正であるから，安定のすわりであるとき

$$\frac{3}{4}n^2 < 150$$

すなわち $n < \sqrt{200} \fallingdotseq 14.1$ である．

よって，15 枚目を乗せた時点で不安定化する．

4. Fig.5 に示すように，質量 400 [g]，直径 20.0 [cm] の円板に天井からつるしたワイヤをかけ，反対側を鉛直上向きに 3.00 [N] の力で引き上げたとする．
   (1) 作用している力をもれなく図示して説明せよ．
   (2) 円板の加速度を求めよ．

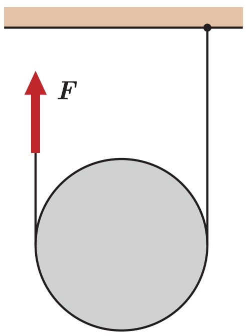

Fig.5

考え方　Newton-Euler 法の素朴な適用である．まずは作用している力をもれなく列挙し，変数設定などの問題設定を行う．Fig.6 のとおり，作用している力は，円板重心に鉛直下向きにかかる重力 $m\boldsymbol{g}$，右側のワイヤ張力 $\boldsymbol{T}$，引き上げ力 $\boldsymbol{F}$ の 3 つである．

ここで重要なのは，加速度や角加速度をどの方向を正としてとるかを明確にすることであ

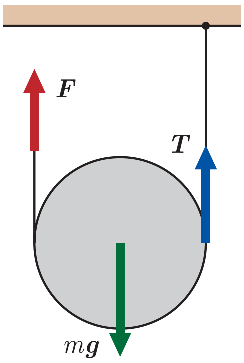

Fig.6

る．この場合は円板の並進運動方向は上なので，加速度は上を正とし，角加速度は通常通り反時計回りを正とするのが分かりやすい．

Newton-Euler 法では，並進運動は Newton の運動方程式，回転運動は Euler の運動方程式を立てて連立させて解くが，これでは拘束条件が足らず解けない．もう一つの拘束条件は，円板の回転角と円板の上昇距離との関係である．円板が反時計回りに角度 θ 回転したとすると右のワイヤを $r\theta$ の長さだけたぐり出すことになり，その分，距離 $r\theta$ だけ円板は下がる．このことから，距離 x だけ上昇するときの回転角が θ であるとすれば，$x = -r\theta$ の関係が分かる．これを 2 回時間微分すれば，$a = -r\dot{\omega}$ が導かれる．

解答例　円板の質量を m $(= 0.400)$ [kg], 半径を r $(= 0.100)$ [m] とする．また，円板が受ける力はすべて鉛直なので，円板重心の加速度を鉛直上方向を正として a [m/s^2] とし，円板の各加速度を反時計回りを正として $\dot{\omega}$ [rad/s^2] とする．

(1) Fig.6 に示す通り，円板が受ける力は，円板重心に鉛直下方向に作用する重力 $m\boldsymbol{g}$，鉛直上方向に作用する右側ワイヤの張力 $\boldsymbol{T}$ および引き上げ力 $\boldsymbol{F}$ である．

(2) 円板重心の並進運動に関する Newton の運動方程式から，

$$F + T - mg = ma \tag{4.1}$$

であり，円板の回転運動に関する Euler の運動方程式から，

$$(T - F)r = \frac{1}{2}mr^2\dot{\omega}, \tag{4.2}$$

また，円板の並進運動と回転運動の拘束関係から，

$$a = -r\dot{\omega} \tag{4.3}$$

である．
式 (4.3) を式 (4.2) に代入して整理して，

$$T - F = -\frac{1}{2}ma. \tag{4.4}$$

式 (4.1) から式 (4.4) を引くことにより，

$$2F - mg = \frac{3}{2}ma.$$

すなわち

$$a = \frac{4F}{3m} - \frac{2g}{3} \approx 3.33 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$