# 工業力学 教科書章末問題のヒント

茨城大学 工学部 機械システム工学科　井上 康介

2015 年度改訂版

## 注 意

ここには，教科書の章末問題のヒントを掲載する．注意すべきことは，**何も考えずに，まずヒントを見るという態度をとらない**ことである．「まず自分で何とかやろうとしていろんなことを考えてみる」というプロセスの中に，力学を「習得する」という結果につながるエッセンスがあるのだから，とにかく一問ごとに「どうしたもんか」といろいろ頭をひねり，教科書・ノートを見返す時間をとること．このヒントを参照するのは，それでも分からなかったときである．後々の講義・研究までを見据えれば，この講義におけるみなさんの目的は「単位を取ること」ではなく，「力学を修得すること」であることは，よく考えれば分かる．どうしても分からないときは質問に来ることを面倒がらないこと．

## 第 1 章　力

1.1 どちらかの力の作用線を $x$ 軸に取ればよい (Fig.1).

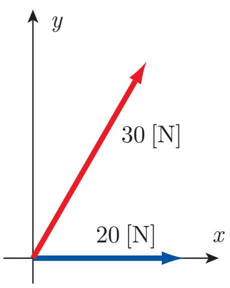


**Fig.1**

1.2 力の方向に $x$ 軸をとったとき, 2 力の合力が $(100, 0)^T$ となればよい (Fig.2).

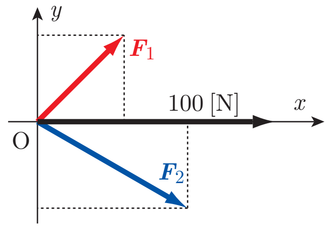


**Fig.2**

1.3 各力の $x$ 方向・$y$ 方向の直角分力を求め，各軸ごとに合算.

力 $i$ を $\boldsymbol{f}_i = (f_{ix}, f_{iy})^T = (f_i \cos\theta_i, f_i \sin\theta_i)^T$ とし，合力を $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)^T$ とすれば，

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_{ix} \\ \sum f_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \cos\theta_i \\ \sum f_i \sin\theta_i \end{pmatrix}$$

なお，解答は $(R_x, R_y)^T$ の形式で答えても，$\boldsymbol{R}$ の大きさと方向 (角度) で答えても情報量としては等価である．教科書の模範解答では後者だが，どちらかと言えばむしろ前者の答え方のほうが使いやすいデータである．

1.4 Bow の記号法をそのまま行えばよい．ただし Bow の記号法は試験範囲外である．

1.5 Fig.3 の力 $\boldsymbol{f}_1$ と $\boldsymbol{f}_2$ の合力が $\boldsymbol{R}$ とする．力 $\boldsymbol{f}_1$ による点 O まわりの力のモーメントは平行四辺形 OPAD の面積に等しい (ベクトル $\boldsymbol{f}_1$ が $x$ 軸となす角を $\theta$ とすると，平行四辺形の底辺の長さは OP であり，高さは $f_1 \sin\theta$ である)．同様に，$\boldsymbol{f}_2$，$\boldsymbol{R}$ による力のモーメントはそれぞれ，平行四辺形 OPBE，OPCF の面積である．

3 つの平行四辺形は底辺 OP を共有している．そこで，平行四辺形 OPAD および OPBE の高さの和が平行四辺形 OPCF の高さに等しければ，OPCF の面積は他 2 つの平行四辺形の面積の和である．そして，$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ であるから…

1.6 特定点まわりに複数の力が作るモーメントの合計は，合力が作るモーメントに等しい．それぞれの力の作用線と点 C との距離を求め，(力の大きさ) ×(モーメントアーム長さ) を計算して各力のモーメントを求

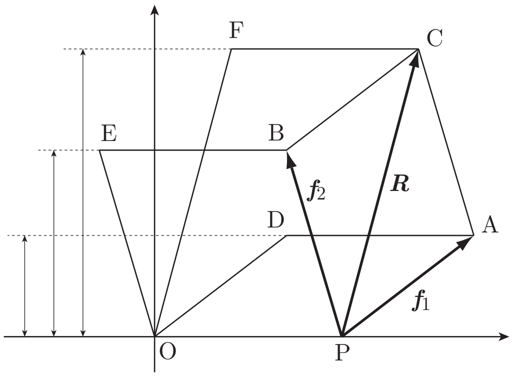


**Fig.3**

める.

1.7 それぞれの偶力の作用線間距離を求めてモーメントを計算して合算する.

1.8 1.3.3「力の置き換え」を参照．モーメントアームは 10[cm]．(力のモーメントの正負は「右側」をどう捉えるかに依存する．)

1.9 合力の大きさと作用線の位置を答えればよい．教科書の図 1.18 の例を参照.

1.10 合力の大きさと作用線の位置を答えればよい．教科書の図 1.18 の例を参照.

1.11 いずれかの点を原点として座標系を作り，各力を原点に移動した際の各直角分力とその点周りのモーメントを求めてそれぞれ合算.

例えば点 A を原点としたとき，5 [N] の力の着力点座標は $(x, y)^T = (20, 15)^T$ であり，力ベクトルは $(f_x, f_y)^T = (0, 5)^T$ である．したがってこの力による原点周りの力のモーメントは $N = f_y x - f_x y = 100$ [N·cm] である.

教科書の模範解答では，これを 1 つの力として，力ベクトル (力の大きさと傾き) および作用線の位置を示すことにより合力を記述しているが，すでに学習したとおり，「原点にかかる力＋原点周りの力のモーメント」として表示しても，情報としては等価である.

したがって，理想的な答え方としては，「原点にかかる力ベクトル ($x$, $y$ 成分) および原点にかかる力のモーメント」という答え方の方が扱いやすい.

1.12 (上と同様)

1.13 例題 1.5 と同等．合力の大きさと，いずれかの点周りの合モーメントを求めて，合モーメントを合力で割った値が，基準点から合力の作用線までの距離となる.

1.14 (省略)

1.15 (省略)

## 第 2 章　力のつりあい

2.1 例題 2.1 を参照．Lami の定理をそのまま適用できる.

2.2 例題 2.5 を参照．支点 A および B は移動支点であるから，反力の方向は垂直である (2.2「接触点，支点に働く力」を参照).

2.3 例題 2.7 を参照．ただし，図式解法 (Bow の記号法) は試験範囲外.

2.4 3 つの張力を変数として，点 B，C において Lami の定理を適用 (Fig.4).

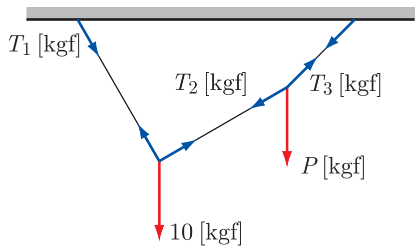


**Fig.4**

2.5 針金全体の重さを $w$ と置くとき，太さが一様であるから，部分 AB および BC のそれぞれの重さは長さに比例しているので $w$ を用いて表記可能．それぞれにかかる重力は中点に作用していると見なせる．部分 CB の傾きを $\alpha$ と置くと，それぞれの部分の重心の水平方向の座標が求まり，これを使って，点 A の周りのモーメントのつりあい条件を式にすればよい.

2.6 接触面は双方なめらかなので，2 反力はそれぞれの方向が決まっている．棒の重さは棒の中点に下向きに作用していると見なして良い (Fig.5).

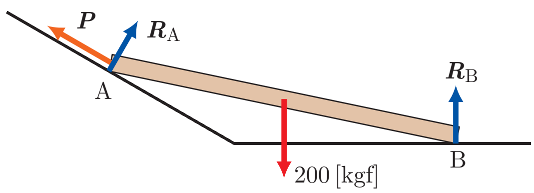


**Fig.5**

棒についてつりあいの条件をつかうことで，3 つの未

知数が求まる．

2.7 棒にかかる重力は棒の中点にかかると見なして良い．2 反力のうちの 1 つは方向が決まっている．棒に働く力の話をしているわけなので，円筒の方は計算の対象としなくて良い．

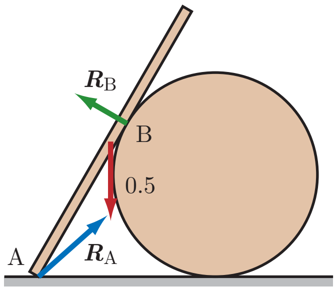


**Fig.6**

Fig.6 のように棒と地面との接触点を A，棒と円筒との接触点を B とし，それぞれの接触点において棒が受ける反力を $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ とする．このとき，B における反力は方向が分かっているので，$\boldsymbol{R}_B = (-R_B \sin 60°, R_B \cos 60°)^T$ とおける．点 A における反力は大きさも方向も分からないので，$\boldsymbol{R}_A = (R_{Ax}, R_{Ay})^T$ と置いておく．

未知数は $R_B$，$R_{Ax}$，$R_{Ay}$ の 3 つ．それに対して使える条件も 3 つある．すなわち，水平・垂直方向の力のつりあい，および力のモーメントのつりあいである．モーメントのつりあい式において，どの点周りのモーメントを考えるかで式の簡単さが変わるのはいつもどおり．

なお，円筒と棒との接触点 B の位置は，幾何学的に考えれば分かる (Fig.7).

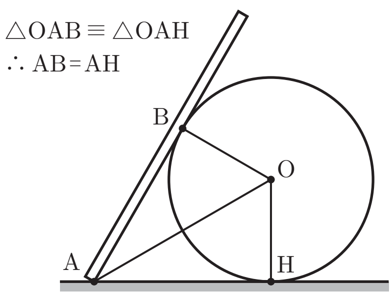


**Fig.7**

2.8 Fig.8 のように点 P を取ると，2 つの丸棒の半径はそれぞれ 15 [cm]，10 [cm] であることから，$\mathrm{O_1O_2} = 25$ [cm]．$\mathrm{O_1P} = 20$ [cm] であるから，$\angle \mathrm{O_2O_1P} = \theta$ とすると，$\cos\theta$ および $\sin\theta$ が求まる．

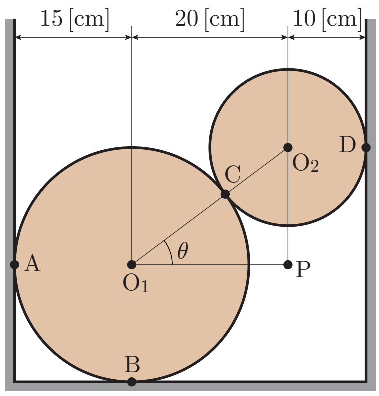


**Fig.8**

次に，Fig.9 の通り反力の記号を定める．

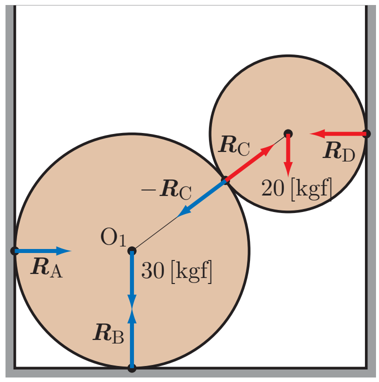


**Fig.9**

右上の丸棒について力のつりあいを求めるとき，まず上下方向のつりあい式を立てると

$$R_C \sin\theta = 20$$

から $R_C$ が求まる．水平方向のつりあい式は

$$R_C \cos\theta = R_D$$

である．

次に，左下の丸棒について同様に水平・鉛直方向のつりあい式を立てればよい．

※ このように，個々の物体に作用している力が一点 (この例では丸棒の中心軸) を通る場合，物体を回転させる作用 (力のモーメント) は発生しないので，その点に作用する力ベクトルの合計をゼロとすればよく，多くの場合直角分力 (水平成分・鉛直成分) に関するつりあい式をそれぞれ立てればよい．

2.9 重力は棒の中点に作用すると考えて良い．棒が受ける外力にはこの重力の他に，両端においてかかる糸の張力があり，それらの角度は分かっている．

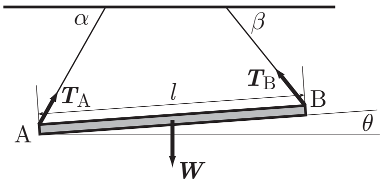


**Fig.10**

棒の角度を Fig.10 のように $\theta$ として，水平・垂直方向の力のつりあい，およびいずれかの点まわりのモーメントのつりあい条件を使うと，$\tan\theta$ が求まる．

まず $x$ 方向のつりあい式は

$$T_A \cos\alpha = T_B \cos\beta \tag{2.9.1}$$

よって

$$T_A = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} T_B \tag{2.9.2}$$

$y$ 方向のつりあい式は

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = W \tag{2.9.3}$$

ここに式 (2.9.2) を代入すると

$$W = \left( \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \sin\alpha + \sin\beta \right) T_B \tag{2.9.4}$$

点 A 周りの力のモーメントのつりあい式は

$$W \frac{l}{2} \cos\theta = (\sin\beta \cdot l\cos\theta - \cos\beta \cdot l\sin\theta) T_B \tag{2.9.5}$$

これに式 (2.9.4) を代入し，$l$ と $T_B$ を消去すると⋯ (以下略)

※ とにかく使える条件を式にしてゴリゴリ解けば良い．

2.10 点 E および C に関して Lami の定理が使える．点 E での定理の適用により $F_{EC}$ が求まる．これを使って点 C に再び定理を適用すれば $F_{CA}$ が求まる．

2.11 ちょうど乗り上げるのに十分な力で B を引っ張っているとすれば，ローラと地面との接触点 (点 A の真下) では作用する力がちょうどゼロとなっており，他の 3 力 (ハンドル (B) を引く力・重力・石からの反発力) がちょうど釣り合っている状態となる．また，石とローラの接触点とローラ中心を結ぶ直線の傾きを $\theta$ としたとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ は幾何学的に考えて簡単に求まる．

3 つの力はすべて作用線がローラ中心を通っているので，回転作用 (力のモーメント) は考慮する必要がなく，あとは水平方向・鉛直方向の力のつりあい条件を考えればよい．

2.12 点 A での接触は滑らかなので, この点において T 字棒が受ける反力は壁に垂直である．右向きに $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸を取れば，この反力は $\boldsymbol{R}_A = (R_{\mathrm{A}x}, 0)^T$ とおける．このように点 A における接触点が移動支点と見なせるのに対して，点 O での拘束は回転支点であり，水平・鉛直の両方向の反力をここで受ける．そこで，O において T 字棒が受ける反力は $\boldsymbol{R}_O = (R_{\mathrm{O}x}, R_{\mathrm{O}y})^T$ とおける．

したがって，未知数は全部で 3 つ．よって条件式も 3 つ必要である．その条件とは，水平方向・鉛直方向の力のつりあいと，力のモーメントのつりあいである．

力のモーメントの式をできるだけ簡単にするには，どの点まわりのモーメントを考えればよいだろうか．

2.13 (本講義の範囲外)

まず示力図に 50 [kgf] の力を描き，適当な極をとってそのベクトルの両端に対する射線を引く．この 2 本の射線の傾きを用いて連力図を描いていくわけだが，この際ポイントとなるのは,「点 O において受けている力の方向が分かっていない」ということである．連力図上に点を打つとき「力の作用線上の任意の点を取ればよい」ということだが，このように**作用線の方向が分からないケース**に対しては，どのように点を打つべきかを考えよ．

2.14 すべての部材力を求めるので，節点法．教科書 2.4.1 項「節点法」の例を参照．

まずは 2 つの反力 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}}$ の大きさを求めるが，これはトラス構造全体を一つの剛体と考えてモーメントのつりあいを考慮すれば求められる．

次に節点 (ジョイント) ごとの水平・鉛直方向のつりあい式を立てていく．簡単な節点から順に進めるのがよく，この場合は点 A または E から攻めるのがよい．

2.15 部材 CD，CG，HG を通る切断面を想定できるので，切断法で解くのが効率的．教科書 2.4.2 項「切断法」の例を参照．

2.14 と同様にして反力の大きさを求めてから，切断されたどちらかの部分トラスを一つの剛体と見なしてその力・モーメントのつりあい条件を使う．言うまでもなく，計算が簡単なのは右側．

# 第3章 重心

3.1 部分ごとに長さ (質量に比例する) と重心位置を求める．(明言していないが，線密度は一定と仮定せよ．)

部分 $i$ の長さを $l_i$，重心位置を $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)^T$ とすれば，全体の重心 $\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = (x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G})^T$ は

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = \frac{\sum l_i \boldsymbol{x}_i}{\sum l_i}$$

により求まる．

3.2 例題 3.2 を参照.

全体の図形の面積が $s_\mathrm{T}$，その重心が $\boldsymbol{x}_\mathrm{T}$ であり，そこからくりぬかれている部分の面積が $s_\mathrm{D}$，その重心が $\boldsymbol{x}_\mathrm{D}$ だとすると，くりぬいた後の図形の重心位置 $\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = (x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G})^T$ は

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = \frac{s_\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\mathrm{T} - s_\mathrm{D}\boldsymbol{x}_\mathrm{D}}{s_\mathrm{T} - s_\mathrm{D}}$$

である．

(b) は，実は解釈の仕方が 2 通りにできてしまう悪問. 半円 2 つと台形の結合形状とみなすか，それとも両側の円形の外周形状と直線部分がなめらかにつながるかによって，計算が変わる．後者の場合は，Fig.11 に示すように，外側の図形を 2 つの扇形と 2 つの台形の結合体とみなす．この場合，例えば右側の扇形の中心角は $\pi - 2\sin^{-1}((4-2)/10)$ [rad] となり，計算がすごく大変になる．

(c) では，大きな扇形から小さな扇形をくりぬいた形状と見なす．

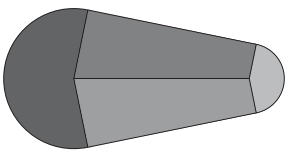

**Fig.11**

3.3 $\phi$ という表記は，円形の物体の直径を意味する (まだ習っていないかもしれない)．対称形なので，求めるべきは対称軸に関する重心座標だけである．つまり，軸上のどの位置に重心があるかを求める．

いくつかの部分が結合された物体において，各部分の体積 (質量に比例する) を $v_i$，その重心を $\boldsymbol{x}_i$ とするとき，全体の重心位置 $\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = (x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G})^T$ は

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = \frac{\sum v_i \boldsymbol{x}_i}{\sum v_i}$$

である．

また，物体から一部をくりぬいた形状において，くりぬく前の体積・重心を $v_\mathrm{T}$，$\boldsymbol{x}_\mathrm{T}$，くりぬかれた部分の体積・重心を $v_\mathrm{D}$，$\boldsymbol{x}_\mathrm{D}$ とすると，くりぬいた後の重心 $\boldsymbol{x}_\mathrm{G}$ は

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{G} = \frac{v_\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\mathrm{T} - v_\mathrm{D}\boldsymbol{x}_\mathrm{D}}{v_\mathrm{T} - v_\mathrm{D}}$$

である．

円錐・半球の重心は教科書を見れば分かる．(b) は，大きな円錐から小さい円錐をくりぬいたと考えることができる．

3.4 水平に $x$ 軸をとり，$x_G - x_A = a$，$x_B - x_G = b$ などとして，それぞれを支点としてつるした状態での力・モーメントのつりあい式を使う．

3.5 Fig.12 のように座標軸をとるとすると，求める値は「持ち上げ前の重心座標 $(x_1, y_1)^T$ である．つまり未知数は 2 つ．

これに対して使える条件式 2 つが，(1)「持ち上げ前の $x$ 軸方向に関する釣り合い条件式」および (2)「持ち上げ後の $x$ 軸方向に関する釣り合い条件式」である．

条件 (1) を用いれば，$x_1$ はすぐに求めることができる．問題は，残る未知数 $y_1$ である．これを条件 (2) を用いて求めなければならない．

持ち上げ後の重心位置 $(x_2, y_2)^T$ を求めるにはどうするか．これについては，持ち上げによる重心位置の移動が，後輪車軸周りの回転移動であることを考える．持ち上げによる後輪車軸まわりの回転量を $\theta$ と置けば，$\cos\theta$ および $\sin\theta$ は $l$，$h$ を使って表すことができる．そして，回転移動の式は

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

であるから，こうして求まる $x_2$ を用いて条件式 (2) を立てればよい．

なお，$M_\mathrm{A} + M_\mathrm{B} = M_\mathrm{a} + M_\mathrm{b}$ から，$M_\mathrm{A} - M_\mathrm{a} = M_\mathrm{b} - M_\mathrm{B}$ であるから，教科書の模範解答の $M_\mathrm{b} - M_\mathrm{B}$ の部分は $M_\mathrm{A} - M_\mathrm{a}$ でも等しい．

3.6 教科書 3.2.2 項「回転体の重心」を参照．球とは，半円を回転してできる回転体であると見なせる．

3.7 教科書 3.2.2 項「回転体の重心」を参照．回転体表面の面積は，回転させる図形の長さにその重心の回転軌跡の長さをかけたものに等しく，回転体の体積は，回

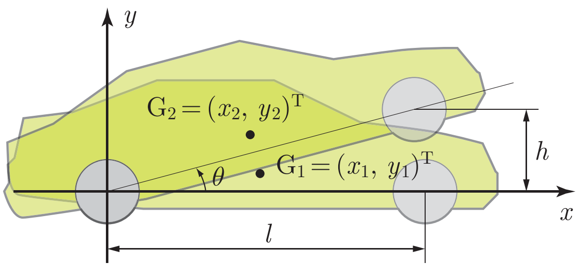


**Fig.12**

転させる図形の面積にその重心の回転軌跡長さをかけたものに等しい．

3.8 中立のすわりであるということは，全体の重心位置はどこになければならないかを考える．回転させても重心高さが変わらないためには，全体の重心はどこにあるべきか？

3.9 転倒する場合の回転中心はどこかを考える．限界の高さでは，その回転中心周りに物体を微小回転させたときの重心の軌道は水平である．このことから，重心位置はどこになければならないかを考える．

## 第 6 章　剛体の運動

6.1 教科書 6.1 節の「回転半径」の定義を参照．式 (6.6) が慣性モーメント・質量・回転半径の間の関係式である．

> **弾み車とは**
>
> 弾み車 (flywheel) とは機械要素の一つであり，重量のある円板とその中央の軸から構成される (Fig.13)．その目的は円板の回転としてエネルギーを保存することにあり，エンジンからプレス加工機械に至る様々な機械製品で利用されている．この問題では，要するに「円板ですよ」という程度の意味なので，気にしなくて良い．

最近のハイブリッド車などでは，ブレーキングで損失する車の運動エネルギーを発電機でいったん電気に変えて電池にためようとするが，「運動 → 発電 (発電機)→ 放電 (モータ) → 運動」という変換の過程でロスが生じるため，可能であれば運動を運動として保存できれば効率がよい．

**Fig.13**　弾み車 (flywheel)

6.2 教科書 6.4 節を参照．球の慣性モーメントは教科書の表 6.1 を参照．

6.3 例題 6.3 を参照．ある物体 A からある物体 B を抜いたときの慣性モーメントは，A の慣性モーメントから B の慣性モーメントを引いたものとなる．

球の密度は暗黙の了解として一定だと考えると，質量は体積に比例する．その密度を $\rho$ [kg/cm$^3$] として，外径 20 [cm] の球を A，外径 15 [cm] の球を B とし，A，B の質量をそれぞれ $m_A$，$m_B$ とすると，

$$m_A = \frac{4}{3}\pi 10^3 \rho, \quad m_B = \frac{4}{3}\pi 7.5^3 \rho$$

A から B を抜いた質量が 4 [kg] なので，

$$mA - m_B = \frac{4}{3}\pi(10^3 - 7.5^3)\rho = 4$$

ここから $\rho$ が求まる．求まった $\rho$ を用いて，A，B の慣性モーメント $I_A, I_B$ を求めることができる．

分かっていれば，密度など持ち出さず，単に

$$m_A = \frac{10^3}{10^3 - 7.5^3} \cdot 4, \quad m_B = \frac{7.5^3}{10^3 - 7.5^3} \cdot 4$$

としてもよい

6.4 各部分の X-X′ 軸まわりの慣性モーメントを求めて合算する．

X-X′ 軸から離れたシャフトの慣性モーメントは，平行軸の定理を用いて求める．また，軸をつなぐ直方体の X-X′ 軸周りの慣性モーメントは，直方体の重心周りの慣性モーメントを求めて，直方体の重心と X-X′ 軸との距離に基づいて平行軸の定理を使う．

6.5 棒状の微小区間を作って地道に積分計算をしてもいいし，2 つの部分に分けて ((部分 A)+(部分 B) とする場合もあるし，(部分 A)−(部分 B) とする場合もあり得る)，それぞれの $x, y$ 軸まわりの慣性モーメントを平行軸の定理で求めて足し算や引き算をしてもいい．結果はきりのいい数字にはならない．

6.6 2 つの部分の質量・重心・重心周りの慣性モーメントをそれぞれ求め，軸の位置を変数として全体の慣性

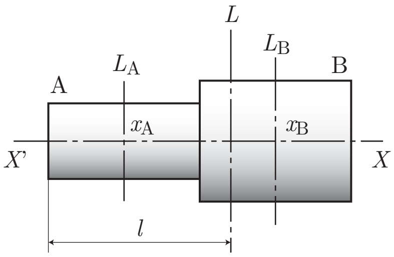


**Fig.14**

モーメントを式にして (平行軸の定理)，それが最小となる位置を求める．

回転軸を Fig.14 の $L$ とする．左右のシャフトをそれぞれ A，B とするとき，それぞれのシャフトの重心位置 $x_A$，$x_B$ を通り X′-X 軸に垂直な軸 $L_{\mathrm{A}}$，$L_{\mathrm{B}}$ 周りの慣性モーメント $I_{AG}$，$I_{BG}$ は教科書 6.4.4 項の通り求まる．

全体を回す回転軸を $L$ とし，その位置を $l$ とすると，全体の慣性モーメントはシャフト A，B の $L$ 周りの慣性モーメントの和であり，それぞれの慣性モーメントは平行軸の定理を使って求めることができるので，全体の慣性モーメントを $l$ の式で求めることができる．この式は下に凸の 2 次関数となるので，式の値を最小とする $l$ は簡単に求まる ($0 \le l \le 20$ だが，問題の性質から言って当然その範囲内に最小点がある)．

一方，シャフト A，B の質量を $m_A$，$m_B$ とすれば，全体の重心位置は

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

で求まる．

これら 2 つが一致することを示し，かつその際の全体の慣性モーメントの値を示せばよい．

6.7 一定トルク 300 [Nm] を 15 [s] かけて 200 [rpm] になったことから，角加速度 $\dot{\omega}$ は求まる (定トルクなので，当然等角加速度運動)．あとは角運動方程式を使えば $I$ が求まる．

6.8 回転半径 $k$ が求まっているので慣性モーメントはすぐに求まる．$\dot{\omega}$ は，10 [s] 間の角速度の増加量から求まる．

6.9 あまりにも簡単なので「ほんとにこれでいいの？」と思わせつつ，それでよかったりする．

「最初弾み車は止まっているとする」という暗黙の条件がないと答えが出ないわけだが，それはまあ，お約束と言うことで．

なお，模範解答は [rpm] の単位で書かれているが，[rad/s] でも [c/s] で何でもよい．

6.10 使える拘束条件は 3 つ：それぞれの車の角運動方程式およびベルトでつながっていることによる角速度比．

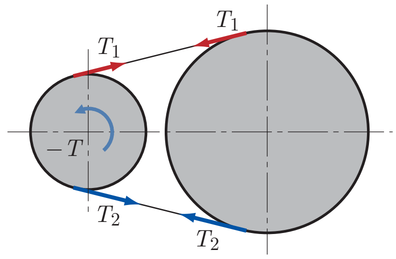


**Fig.15**

それぞれの車は Fig.15 のように張力 $T_1, T_2$ を受けている．左側の車が張力 $T_1$ から受けるモーメントの大きさは，モーメントアームが車の半径に等しく，時計回り方向なので $-T_1 R_{\mathrm{A}}$ である．また，トルクの大きさは $T$ だが，図から見てトルクをかけている方向が時計回り方向なので，受けるモーメントは $-T$ とする．すると，左の車の角運動方程式は

$$-T - T_1 R_{\mathrm{A}} + T_2 R_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{A}} \dot{\omega}_{\mathrm{A}}$$

とかける．同様にして右の車の角運動方程式が導かれる．

第 3 の条件である滑らない条件だが，左の車が $\dot{\omega}_{\mathrm{A}}$ で加速するとき，ベルトの加速度は $R_{\mathrm{A}}\dot{\omega}_{\mathrm{A}}$ である．一方右の車が $\dot{\omega}_{\mathrm{B}}$ で加速するならベルトの加速は $R_{\mathrm{B}}\dot{\omega}_{\mathrm{B}}$ である．ベルトは繋がっているのだから，この 2 つの加速度は等しくなくてはならない．これが「ベルトが滑らないという条件」となる．

**注意**　教科書の模範解答では，時計回りを正としているため，$\dot{\omega}_{\mathrm{B}}$ が正の値になっているが，**これは間違いと見るべきである**．場合によって時計回りを正としたり反時計回りを正としたりといったやり方は強烈なミス要因になる．絶対にやってはならない．回転方向は反時計回りを正，座標値については右および上を正とすることをできうる限り徹底すること．どうしてもそれに従えないときは，それがミス要因とならないように十分気をつけること．厳格にこのルールを適用した場合，$\dot{\omega}_{\mathrm{B}}$ は反時計回りを正として，負の値となる (回転方向が時計回りなのだから当然)．

※ ちなみに，この問題において，変数 $T$ はトルク (torque) であり，$T_1$，$T_2$ は張力 (tension) である．こ

のように，全く異なる量に対して同じ「T」という文字を割り当てるような変数の定義方法は決して褒められたものではなく，誤解やミスの原因となる．例えばこの問題に対しては，トルクの変数を $\tau$ (タウ) とするなど，誤解やミスを減らす工夫をすべきである．なお，これは 2 年生から習うプログラミングにおいても同じであり，変数名を分かりやすいものにすることを意識してプログラムを作ることが，そのプログラムを読みやすいものにする．

6.11 例題 6.6 とほとんど同じである．10 [s] で転がる距離を求めるには，等加速度運動の式 $x = (1/2)at^2$ を使えばよい．

6.12 拘束条件は 3 つ：運動方程式，角運動方程式および「すべらない」という条件.

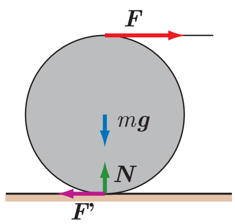


**Fig.16**

円柱が受ける力の合力と中心の加速度との関係として運動方程式が求まる.

角運動方程式を求める際，円柱が受ける中心周りのモーメントは，糸によるものについては力の大きさが $F$，モーメントアームが $r$．一方，摩擦力による力のモーメントは力の大きさが $F'$，モーメントアームはやはり $r$．それぞれ，時計回りの方向である.

また，滑らないという条件は基本的には例題 6.6 と同等だが，回転方向について，反時計回りを正とし，中心の移動方向を右を正としたとき，正負はどうなるかに注意が必要である.

6.13 例題 6.7 を参照.

## 第 7 章 衝 突

7.1 運動量の定義通り．単位を [kg m/s$^2$] とする方が使いやすい情報になる.

7.2 摩擦はない (ブレーキもかかっていない) という暗黙の了解があると思われる．力積を質量で割れば速度変化が求まる.

7.3 20 [s] 間に作用した力は一定であるという暗黙の想定があると思われる．運動量の変化が力積に等しいことを利用.

7.4 作用している力が時間変化する場合は、力積は力の時間積分として求める.

7.5 運動量変化が力積に等しいことを利用．また，「平均」が何に関する平均か明示されていないが，常識的には時間平均であると考えると, 0.02 [s] の間同じ力が作用し続けたと考えられる．そうであれば $\Delta(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}t$ となる.

7.6 物体と人間それぞれの運動量を考えたとき，飛び込む前後で運動量の和は一定に保たれている (運動量保存則).

7.7 完全塑性衝突なので，おもりと杭の衝突後はそれらは一体となって進む．衝突直前のおもりの速度 $v_1$ を求めるとその際のおもりの運動量が分かり，運動量保存則から一体化直後の速度 $v_2$ が分かる．また，暗黙の了解として，衝突後停止するまで等加速度運動をすることを想定する．その加速度は，地面に食い込んだ深さ $d$ から $v_2^2 = 2ad$ の式により求まる．加速度が求まればその際に一体化した物体に作用している力が分かるが，その中には重力が含まれていることに注意する.

7.8 はねかえり係数の定義式 $v'_B - v'_A = e(v_A - v_B)$ にぶち込んで終わり.

7.9 運動量保存則 $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$ とはねかえり係数の定義式 $v'_A - v^p_B rime = e(v_B - v_A)$ を連立させて解く.

7.10 高さ $h$ からの自由落下による地面との衝突直前の速度は $v_0^2 = 2gh$ から $v_0 = \sqrt{2gh}$ と求まる (この式を知らなかった人は復習すること)．1 回目のバウンド直後の速度は $v_1 = ev_0$ である．ここから，1 回目のバウンド後にゴム球が跳ね上がる高さは $h_1 = v_1^2/2g = e^2 v_0^2/2g = e^2 h$ となる．同様にして，2 回目以降は $h_2 = e^4 h, h_3 = e^6 h, \cdots, h_n = e^{2n}h, \cdots$ となる．つまり，バウンドするごとに高さが $e^2$ 倍になっていく．その際の移動距離は，最初の落下の移動距離が $h$，次は上がって下りるので $2h_1$，その次は $2h_2$，$\cdots$ となる．あとは $n$ 回目までの和 (公比 $e^2$，初項 $e^2 h$ の等比数列の和に初回の $h$ を加えたもの) を求め，$n \to \infty$ の極限を取ればよい.

7.11 教科書 p.93〜95 (2) 斜めの衝突，p.94 [例題 7] を参照.

7.12 教科書 p.93〜95 (2) 斜めの衝突，p.95 [例題 8] を参照.

7.13 教科書 p.93〜95 (2) 斜めの衝突，p.95 [例題 8] を参照．水平方向の速度は変わらないという暗黙の前提がある．一方，速度の鉛直成分は衝突のたびに $e$ 倍になる．なお，鉛直方向の速度 $v_{\text{vertical}}$ で地面から打ち上げた物体が最高点に到達するまでの時間は，加速度 $g$ の等加速度運動であることから，$v_{\text{vertical}}/g$ である．よって，1 回目の地面との衝突までの時間は $t_1 = 2v_{\text{vertical}}/g$，2 回目は鉛直方向の初速が $e$ 倍になるので $t_2 = 2(e \cdot v_{\text{vertical}})/g = et_1$，同様に 3 回目は $t_3 = et_2 = e^2 t_1$．すなわち，3 回目の着地までの時間 $t_1 + t_2 + t_3$ の間，水平方向に関しては物体は水平方向の速度 $v_{\text{horizontal}}$ による等速度運動をする.

7.14 教科書 p.95 (3) 偏心衝突，p.97 [例題 9] を参照．棒の換算質量を求めれば，あとは向心衝突の議論が使える.

7.15 教科書 p.97 の棒の一端が支えられているケースの扱いを参照.

7.16 教科書 p.98〜99 (4) 打撃の中心，p.99 [例題 10] を参照.

## 第 8 章　仕事・エネルギー・動力

8.1 質量 $m$ の物体の重心位置を $\Delta h$ だけ高い位置に移動させるために必要な仕事は，重力加速度を下方向に $g$ として $mg\Delta h$ である．物体の重心位置を変えない限り，物体の姿勢 (横向き・縦向きなど) を変えるのには，仕事は必要としない (位置エネルギーを考えるとき，質量が $m$，重心高さが $h$ の時の位置エネルギーは $U = mgh$ である).

したがって，ここでは横倒し状態と直立状態における円柱の重心高さの差を求め，これに $mg$ を乗じれば，加えなければならない仕事量が分かる.

**Fig.17**　巻胴 (巻き上げドラム hoisting drum)

**重心高さで計算してよい理由**

物体の重心高さを $h_{\mathrm{G}}$, 物体上の微小部分の質量を $dm$，その位置を $h$ とするとき，微小部位の位置エネルギーは $dU = gh\ dm$ であり，その物体全体にわたる合計は

$$U = \int dU = \int gh\ dm$$

である．一方，高さ方向の重心の式は

$$h_{\mathrm{G}} = \frac{\displaystyle\int hdm}{\displaystyle\int dm} = \frac{\displaystyle\int hdm}{m}$$

であるから，$\int h\ dm = mh_{\mathrm{G}}$．これを上の式に代入して，

$$U = \int gh\ dm = g\int h\ dm = mgh_{\mathrm{G}}$$

8.2 初期状態から $x$ [m] だけ引き上げた時点において，巻胴の下にあるのは $50 - x$ [m] のロープと 500 [kg] の物体であることから，このときの引き上げ力がどれほどかは分かる．この状態から微小長さ $dx$ [m] を巻き上げるために必要な微小仕事 $dW$ [J] を求め，$x$ を 0 から 30 までとして積分すればよい.

**巻胴とは**

巻胴 (巻き上げドラム hoisting drum) とは，荷重の巻上げ，巻下げ用ロープを巻き取るドラムをいう (Fig.17)．電線敷設工事などでは，巻き付いている電線自体を荷重としてドラムを用いる.

8.3 バネ定数を $k$，自然長を $x_0$ としたとき，引張力が $f$ で長さが $x$ だとすれば $f = k(x - x_0)$ である．この式への代入により，$k$，$x_0$ が求まったら，後の計算は例題 2 の通りである.

8.4 エネルギーを与える前後の力学的エネルギーの差が与えたエネルギー量である.

8.5 滑る前に持っていた力学的エネルギーは 20 [cm] 分の位置エネルギー．滑った後に持っているエネルギーは 10 [cm/s] 分の運動エネルギーである．その差が喪失したエネルギー量である．

8.6 バネまでの高さを図 8·20 のように $x$ [cm] とおくとき，この高さから落下することにより，バネに接触する直前において，物体は当初の位置エネルギーと同量の運動エネルギーを得ている (その代わり位置エネルギーを喪失している)．バネに接触して以後，バネ力を上向きに受けることで速度を失いながらバネを縮めていき，物体が静止した瞬間において，運動エネルギーはその時点でのバネの弾性エネルギーに変換されている．すなわち，最初に持っていた重力による位置エネルギーが，この時点での弾性エネルギーに等しい．

> 「縮める」の読みは，「ちじめる」ではなく「ちぢめる」である．

8.7 要するに硬いバネを縮めた状態で上に軽い物体を載せて手を離すと，思い切りバネが伸びて，物体を上に放り上げる．バネの質量を無視すると，バネは自然長で静止する．すると，縮めた状態のバネに溜まっていた弾性エネルギーが，そのまま物体を放り上げた瞬間の運動エネルギーに変換され，物体は上昇しつつその運動エネルギーを重力による位置エネルギーに変換していく．最高点においては運動エネルギーは 0 となり，その時点での重力による位置エネルギーが，バネからもらったエネルギー量 (すなわち弾性エネルギー) に等しい．

8.8 静かに手を離していった場合というのは，物体が下がっていくのにあわせて手を下げていき，釣り合った位置のところで静かに物体と手が離脱する状態を指している．その場合は，物体が止まる位置が最下点となり，その状態において，力がつりあっている．そしてこのケースでは，重力による仕事を手が受け取ってしまうため，前後におけるエネルギー保存は成り立たない．

一方，急に手を離した場合，自然長の状態からつりあい点に向けて物体は勢いを持って下がっていくため，つりあい点に到達した時点で速さを，すなわち運動エネルギーを持っている．その結果，物体はつりあい点を通過してさらに下に動いていく．その運動エネルギーはバネに引っ張られて徐々に失われていく．最下点は物体がちょうど停止した位置である．このケースでは，エネルギーは系の外部 (つまり手) との間でやりとりが起こらないのでエネルギー保存が成り立ち，そこでは重力によるエネルギー・バネの弾性エネルギー・物体の運動エネルギーの 3 者が関係する．ただし初期位置および停止位置においては物体はちょうど停止しているので，運動エネルギーは計算から除外される．

8.9 坂から下りた車が，円形レールの最上点に達した瞬間において，レールを離脱して落下するか否かは，そのとき作用している遠心力と重力のどちらが大きいかに依存する．この条件から，その瞬間の速さ $v$ がいくら以上でなければならないかの式を立てる．

8.10 問題文の記述が不十分である．「木にめり込んでいく弾丸が木から受ける抵抗力 $F$ は一定である」という但し書きが必要な問題．この前提の下で，めり込んでいく過程で木が行う仕事量を考えて解く．

8.11 教科書 p.109〜110 の説明の通りにやればよい．ただし，式 (7.18) は暗記するようなものではなく，運動量保存則 $5v_1 + 3v_2 = 5v_1' + 3v_2'$ および反発係数の定義式 $v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2)$ を連立させることで衝突後の速度を求めること．これらが求まってしまえば，エネルギー損失は衝突前後の運動エネルギー和の変化量として求まる．

8.12 1 [h] あたりの仕事の量は，p.103 の議論から $W = mgh$ により求まる．そして，動力 $P$ とは 1 [s] あたりの仕事量である．

8.13 $m$ [kg] の物体を $h$ [m] 持ち上げる仕事量は $W = mgh$ [J] であり，これに $t$ [s] の時間をかけたとすると，動力は $P = W/t$ [W] である．単位 [PS] と [W] の間の変換は p.111 の通り．

8.14 $P = Fv$ の式そのままでよい．

> **バイトとは**
>
> 旋盤などの加工機械に取り付ける刃物のこと (Fig.18) であり，バイトに対する加工物の相対速度は一定の方向を持つ．

8.15 $P = Fv$ の式そのままでよい．

8.16 勾配が 1/1000 であるということは，斜面の傾角を $\alpha$ とすると $\tan\alpha = 1/1000$ ということである．このように角度がきわめて小さい場合，$\sin\alpha = \tan\alpha$,

**Fig.18**　よく使われるバイトの例

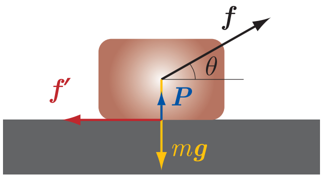


**Fig.19**

$\cos\alpha = 1$ とする近似が高い精度を持つ (直角 3 角形の斜辺と底辺の長さがほぼ等しい状態に対応する).

機関車が等速で走るためには，機関車を後ろに引っ張る力 (重力の斜面下方向成分と抵抗の合力) に対抗する力を発揮しなければならない．力が求まれば，速さは所与なので動力は求まる．

8.17 p.112 例題 11 を参照．

8.18 p.112 の通り，回転の動力はトルクと角速度の積である．

## 第 9 章　摩 擦

9.1 静摩擦係数と摩擦角の関係は p.115〜116 の説明の通り．

9.2 等速度運動をしているということは，物体に作用している力が釣り合っていることを示している．斜面に垂直な方向に関しては，重力の斜面に垂直な方向の成分が，垂直抗力と釣り合っていることを示し，斜面に平行な方向に関しては，重力の斜面下向き成分と動摩擦力が釣り合っている．

9.3「加速度を求めよ」ということは物体は動き始めているので，動摩擦に関する扱いをする．動摩擦力は地面に垂直な押しつけ力に比例し，その押しつけ力は重力だけで決まるものではないことに注意する．

9.4 物体が受ける力を列挙すると，Fig.19 に示す通り，重力 $m\boldsymbol{g}$，引張力 $\boldsymbol{f}$，静摩擦力 $\boldsymbol{f}'$，垂直抗力 $\boldsymbol{P}$ がある．

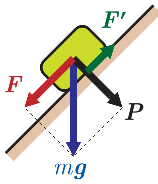


**Fig.20**

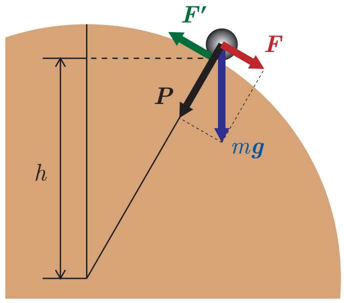


**Fig.21**

9.5 物体が受けている力を列挙すると Fig.20 に示す通りである．重力 $m\boldsymbol{g}$ の斜面に沿って下向きの成分を $\boldsymbol{F}$，斜面に垂直な成分を $\boldsymbol{P}$ とすると，摩擦力 $\boldsymbol{F}'$ は斜面に沿って上向きの方向を持ち，その大きさは $\mu P$ である．したがって物体が斜面下向きに受けている合力が分かり，ここから加速度を求める．

9.6 **この問題は自分には解けませんでした．**未知数が「2 つの接触点における垂直抗力・摩擦力」および「滑り始める瞬間の人間の位置」で，合計 5 つあるのに対して，使える条件式が「縦・横の力のつりあい式」,「モーメントのつりあい式」,「滑り始めた方の接触点における摩擦力の式 ($\boldsymbol{F}' = \mu P$)」の 4 つしかなく，拘束条件が充足していないように思います．また，先にどちらか片方の接触点においてだけ摩擦の限界に達した場合に何が起こるのかが不明確です．前任者の先生から頂いた模範解答も，意味不明で解読できません．

解けた方，情報ください！

9.7 接触点において，物体にかかる重力のうちのすべり落ちる方向 (接線方向) の成分 $\boldsymbol{F}$ の大きさおよび重力のうちの球の中心に向かう方向の成分 $\boldsymbol{P}$ をまず求める．摩擦力 $\boldsymbol{F}'$ は接線方向で $\boldsymbol{F}$ と反対方向を向いており，その大きさは $\mu P$ であるが，滑り落ちる限界の位置においては $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ である (Fig.21).

9.8 自動車を真正面 (または真後ろ) から見た時，自動車を横滑りさせようとする力 $\boldsymbol{F}$ は，遠心力であり，$F = mr\omega^2 = mv^2/r$ である．一方，それを妨げよう

とする摩擦力 $\boldsymbol{F}'$ の大きさは，垂直抗力を $\boldsymbol{P}$ とすると $\mu P$ であり，$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ である．

9.9 ころを押す力 $\boldsymbol{F}$ が転がり摩擦力 $\boldsymbol{F}'$ と拮抗していればよい．転がり摩擦力の大きさは $F' = \mu_r mg$ である．

9.10 **ここは講義で扱っていない範囲です．**転がり摩擦係数に長さの単位が付いているということは，教科書 p.123 における「着力点のズレ」$e$ を表している．この場合，摩擦の関係式は

$$Fr = Pe$$

となる．自動車では車輪は 4 つあり，1 車輪当たりの垂直抗力 $P$ の大きさは平均的には $mg/4$ だが，押す力 $\boldsymbol{F}$ は 4 車輪分の摩擦力に対抗しなければならないので，結局 $(1/4)\cdot 4 = 1$ 倍となり，上の式をそのまま使える．

9.11 **ここは講義で扱っていない範囲です．**転がり摩擦係数に長さの単位が付いているということは，教科書 p.123 における「着力点のズレ」$e$ を表している．あとは例題 9.3 と同様.

9.12 **模範解答の誤植が疑われます．まず，牽引できる列車の全質量は，**$3675 \cdot 10^3$ [kg] **であり，全重量ということであれば，**$3675 \cdot 10^3$ [kgf] $= 3.60 \cdot 10^7$ [N] **となると思われます．**

機関車の発揮できる最大牽引力 (これ以上引っ張ると車輪が滑っちゃうという限界) は，機関車の質量を $m$ とすると $F_{\mathrm{MAX}} = \mu_{\mathrm{s}} mg$ として求まる．引っ張る列車の全質量を $M$ [kg] とすれば，列車が持つ摩擦抵抗は $(M/1000)\cdot 40$ [N] であり，これが $F_{\mathrm{MAX}}$ と等しい.

(9.13 **以降は** 2011 **年度の試験範囲外**)