工業力学 演習問題 解説・解答例

茨城大学 工学部 知能システム工学科　井上 康介

Rev. 2012

間違い等ありましたら至急お知らせください．

本文中で参照している章節番号や例題番号は，森北出版の教科書「工業力学」(青木 弘・木谷 晋 共著) に対応しています．

1　力

1.2　1 点に働く力の合成と分解

1. **問題**　Fig.1.1 のように，f_1 [N] の力と f_2 [N] の力が角度 $\pi/3$ [rad] をなして 1 点に作用している．これらの合力の大きさが f [N] で，その方向は f_1 に対して θ [rad] をなすとするとき，f および $\tan\theta$ を求めよ．

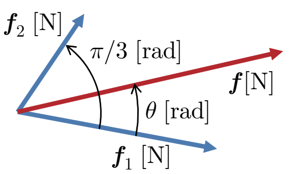


Fig. 1.1

考え方　教科書 1.2.1「2 力の合成」を参照．1 点に作用する力の合成なので，単純なベクトルの足し算をすればよい．

解答例　$\boldsymbol{f}_2$ の $\boldsymbol{f}_1$ 方向成分は $f_2\cos(\pi/3) = f_2/2$ であり，$\boldsymbol{f}_1$ の方向から z 軸まわりに $\pi/2$ [rad] 回転した方向の成分は $f_2\sin(\pi/3) = (\sqrt{3}/2)f_2$ である．よって，

$$f = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}f_2\right)^2 + \left(f_1 + \frac{1}{2}f_2\right)^2}$$
$$= \sqrt{f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2} \text{ [N]}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}f_2}{2f_1 + f_2} \text{ [rad]}$$

別解 (θ の求め方)

$$f\sin\theta = f_2\sin(\pi/3)$$

より，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}f_2}{2f}$$

$\cos\theta > 0$ なので

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\sqrt{4f_1^2 + 4f_1f_2 + f_2^2}}{2f}$$
$$= \frac{2f_1 + f_2}{2f}$$

よって

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}f_2}{2f_1 + f_2}$$

1.3　力のモーメント

1. **問題**　Fig.1.2 に示すように，半径 30 [cm] の円板が中心を原点として xy 平面上に置かれている．図の通り x 軸から 30° をなす点 P において，y 軸負の方向に 20 [kgf] の力を加えたとする．この力を原点 O に作用するものとして置き換えよ．

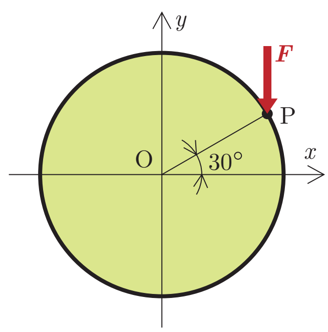


Fig. 1.2

考え方　教科書 1.3.3「力の置き換え」の内容．ある点 B から距離 d 離れた作用線を持つ力 $\boldsymbol{F}$ を，点 B に作用する力に置き換えるとき，作用線の位置が変わることにより余分なモーメントが加わり，置き換えた結果は「点 B に作用する力 $\boldsymbol{F}$ および大きさ Fd のモー

メント」となる．モーメントの正負は，作用線の移動方向に依存する．

解答例　力 $\boldsymbol{F}$ の作用線と原点 O との距離は $0.3 \cdot \cos 30° = 0.15\sqrt{3}$ [m]．したがってこれによる原点 O まわりの力のモーメントは

$$-20g \cdot 0.15\sqrt{3} = -3\sqrt{3}g \fallingdotseq -50.9 \text{ [Nm]}.$$

よって，原点 O に作用する $(0, -196)^{\mathrm{T}}$ [N] の力と -50.9 [Nm] の力のモーメントと置き換えられる．

1.4　着力点の異なる力の合成

1. **問題**　Fig.1.3 のように物体に複数の力がかかっている．これらの力を合成し，点 O に作用する一つの力と一つのモーメントとせよ．

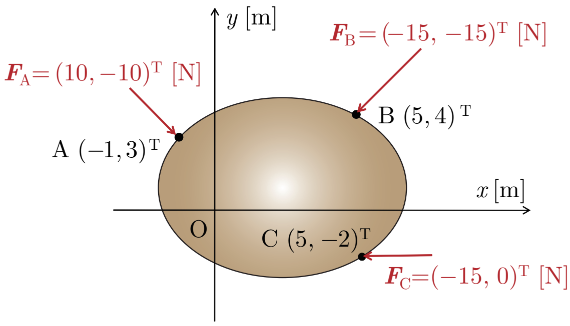


Fig. 1.3

考え方　教科書 1.4.2「3 力以上の力系の合成」および例題 1.4 を参照．力を移動することにより，力の作用線が移動するとともに，力のモーメントが発生する．原点への移動の場合，力の着力点を (x, y) とし，力ベクトルを (F_x, F_y) とすると，その大きさは $F_y x - F_x y$ である．各力ごとにこの値を求め，合算すればよい．

解答例　各力を原点に移動した際の力の大きさおよび力のモーメントの大きさを表にすると，

力	x 成分 [N]	y 成分 [N]	モーメント [Nm]
$\boldsymbol{F}_A$	10	-10	$10 - 30 = -20$
$\boldsymbol{F}_B$	-15	-15	$-75 + 60 = -15$
$\boldsymbol{F}_C$	-15	0	-30
	-20	-25	-65

以上から，原点に作用する $(-20, -25)^T$ [N] の力と，-65 [Nm] の力のモーメントとなる．

2　力のつりあい

2.2　接触点，支点に働く力

1. **問題**　Fig.2.1 のように, 軽くて質量の無視できる棒の先に 15 [kg] の物体をつるし，AB 間にワイヤを張って支える．ワイヤの耐えうる張力が 300 [N] までとしたとき，支えられるためには θ はどの範囲になければならないか．ただし重力加速度は $g = 10.0$ [m/s^2] とする．

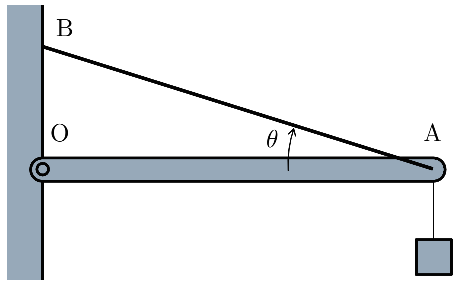


Fig. 2.1

考え方　点 A に着目する場合，すべての力 (荷物の重量，点 O における壁からの反力およびワイヤの張力) の作用線がすべて点 A を通るので，モーメントは作用しない．張力 $\boldsymbol{T}$ の大きさが分かればよいので，1 点 A に作用する力のつりあいのみを考えればよい．

1 点に作用する力がつりあっているためには，作用している力について力の多角形を描き，それが閉じている (始点と終点が一致する) 条件を使えばよい．あるいは，各力について直交する 2 軸の方向 (例えば水平方向と鉛直方向) の成分を求め，方向ごとに和がゼロであるとする．

解答例　ワイヤの張力を $\boldsymbol{T}$，点 O における壁からの反力を $\boldsymbol{R}$ とする．OA は水平なので，$\boldsymbol{R}$ は水平右向きの力である．点 A に作用している力はこれらの他に物体の重量 15 [kgf] = 150 [N] である．これらの力による力の多角形を描くと Fig.2.2 の通りとなり，つりあっているので閉じている．

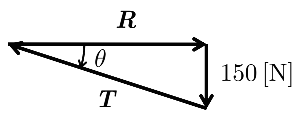


Fig. 2.2

よって，

$$T \sin\theta = 150$$

となり，$T \leq 300$ を代入すると，

$$\sin\theta \geq \frac{1}{2}$$

となる．よって

$$\theta \geq \frac{\pi}{6} = 0.524 \text{ [rad] } (= 30 \text{ [deg]}).$$

2.3　着力点の異なる力のつりあい

1. **問題**　水平に置かれた長さ 0.4 [m] の細い棒が両端で支えられており，Fig.2.3 の位置に 2 [N]，3 [N] の外力が鉛直下向きに作用している．

   (1) 2 つの外力の合力の大きさと作用線の位置を求めよ．

   (2) 反力 R_1，R_2 [N] を求めよ．

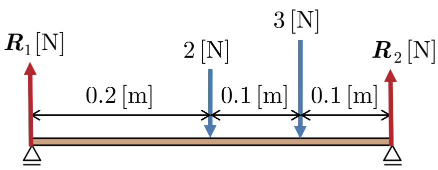


Fig. 2.3

考え方　平行な複数力の合力を求める問題は例題 1.5，平行な複数力のつりあいの解析については例題 2.5 を参照．すべての力が同じ方向を向いている場合，つりあい条件は 3 つではなく 2 つとなる．つまり，力の方向における合力のつりあい，および任意の点まわりの合モーメントのつりあいの 2 つである．

解答例

(1) 合力を $\boldsymbol{f}_\mathrm{R}$ とすると，これは鉛直下向きの 2 力の合力であるから，方向は鉛直下向き．大きさは $R = 2 + 3 = 5$ [N]．$\boldsymbol{f}_\mathrm{R}$ の作用線の位置を棒の左端から d [m] とすると，棒の左端まわりの力のモーメントがつりあっていることから，

$$0.2 \cdot (-2) + 0.3 \cdot (-3) = d \cdot -5$$

よって $d = 0.26$ [m]．

(2) 棒に作用する力のつりあい (すべて鉛直方向) より，

$$R_1 + R_2 - 2 - 3 = 0 \tag{2.1}$$

棒左端点まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0.2 \cdot (-2) + 0.3 \cdot (-3) + 0.4 \cdot R_2 = 0 \tag{2.2}$$

よって $R_2 = 3.25$ [N]．
$R_1 = 5 - R_2 = 1.75$ [N]．

2. **問題**　Fig.2.4 に示すように，質量 $\sqrt{6}$ [kg] の棒 1 が角度 $\pi/4$ [rad] で傾き，質量 2 [kg] の棒 2 が角度 $\pi/3$ [rad] で傾いて支え合っているとする．棒の間に及ぼしあう力および地面からの反力をすべて求めよ．なお，接触面はすべてなめらかではないとし，棒の太さは無視できるとせよ．図中の寸法の単位は [m] である．

   ただし重力加速度は $g = 10.0$ [m/s^2] とする．

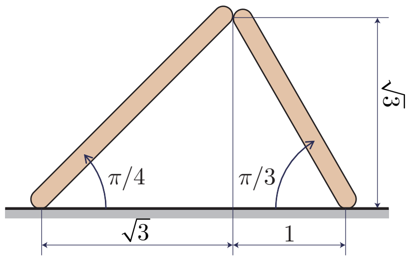


Fig. 2.4

考え方　平面における物体のつりあい条件は一般に，物体 1 つあたり 3 つである．まず，直交する 2 つの方向 (例えば水平方向と鉛直方向) について，物体が受けている力の各方向の成分がそれぞれ合計でゼロとなるという力のつりあい式，そして任意の点まわりの合モーメントがゼロとなるというモーメントのつりあい式である．

この問題においては，未知数は，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$ で，それぞれ水平・鉛直成分があるので 6 つ．それに対して，棒 1，2 の水平・鉛直方向の力のつりあいとそれぞれの力のモーメントのつりあいがあり，拘束も 6 つとなって，解ける．

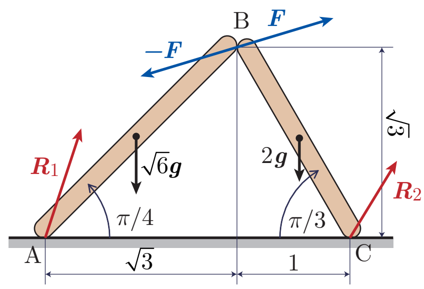


Fig. 2.5

解答例　水平右向き及び鉛直上向きをそれぞれ x 軸，y 軸の方向とする．Fig.2.5 のように $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)^T$，$\boldsymbol{R}_1 = (R_{1x}, R_{1y})^T$，$\boldsymbol{R}_2 = (R_{2x}, R_{2y})^T$ をとる．ただし，$\boldsymbol{F}$ は，棒 2 が棒 1 から受けている力とする．

棒 1 についてのつりあい式は以下の通り：

- x 方向 力のつりあい：

$$R_{1x} - F_x = 0 \tag{2.3}$$

- y 方向 力のつりあい：

$$R_{1y} - F_y - \sqrt{6}g = 0 \tag{2.4}$$

- A 点まわりの力のモーメントのつりあい：

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6}g + (-F_y) \cdot \sqrt{3} - (-F_x) \cdot \sqrt{3} = 0 \tag{2.5}$$

棒 2 については：

- x 方向 力のつりあい：

$$F_x + R_{2x} = 0 \tag{2.6}$$

- y 方向 力のつりあい：

$$F_y + R_{2y} - 2g = 0 \tag{2.7}$$

- C 点まわりの力のモーメントのつりあい：

$$-\frac{1}{2} \cdot -2g + (-1) \cdot F_y - \sqrt{3}F_x = 0 \tag{2.8}$$

式 (2.5) を簡単化すると

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}g - F_y + F_x = 0 \tag{2.9}$$

同様に式 (2.8) は,

$$g - F_y - \sqrt{3}F_x = 0 \tag{2.10}$$

式 (2.9) から式 (2.10) を引いて,

$$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right) g + (1 + \sqrt{3})F_x = 0$$

よって

$$F_x = \frac{2 + \sqrt{6}}{2(1 + \sqrt{3})}g \fallingdotseq 8.14 \text{ [N]}$$

これを式 (2.9) に代入して

$$F_y = F_x - \frac{\sqrt{6}}{2}g \fallingdotseq -4.10 \text{ [N]}$$

式 (2.3) より $F_x = R_{1x}$ であり，式 (2.6) に代入して,

$$F_x = R_{1x} = -R_{2x} \tag{2.11}$$

これに求まった F_x を代入して,

$$R_{1x} = F_x \fallingdotseq 8.14 \text{ [N]}$$
$$R_{2x} = -F_x \fallingdotseq -8.14 \text{ [N]}$$

式 (2.4) に求まった F_y を代入して

$$R_{1y} = F_y + 10\sqrt{6} \fallingdotseq 20.4 \text{ [N]}$$

式 (2.7) に求まった F_y を代入して

$$R_{2y} = F_y + 20 \fallingdotseq 24.1 \text{ [N]}$$

3. **問題**　Fig.2.6 のように長さ $l = 2$ [m]，質量 $m_1 = 1$ [kg] の細い棒が，半径 $r = 1$ [m]，質量 $m_2 = 2$ [kg] の円柱に立てかけられ，地面との間に角度 $\pi/3$ [rad] をなしている．棒と地面の間には摩擦があるが，円柱と棒，円柱と床や壁の間には摩擦がないとする．棒が円柱から受ける力を $\boldsymbol{F}$，棒が床から受ける反力を $\boldsymbol{R}_1$，円柱が床および壁から受ける力を $\boldsymbol{R}_2$，$\boldsymbol{R}_3$ とするとき，R_1，R_2 [N] を求めよ．

ただし重力加速度は $g = 10.0$ [m/s^2] とする．

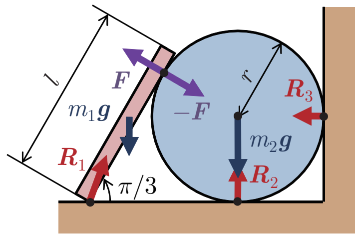


Fig. 2.6

考え方　力のつりあいの問題は，各物体に関して力のつりあい (直交 2 軸の方向，例えば水平，鉛直方向) および力のモーメントのつりあいの式を立てて解く．この場合，棒の接地点まわりのモーメントのつりあいから F が求まり，円柱が受ける x，y 方向の力のつりあいから，R_3，R_2 がそれぞれ求まる．

接地点から $\boldsymbol{F}$ の着力点までの距離は，幾何学的計算から $\sqrt{3}$ [m] と求まる．

解答例　Fig.2.7 のように点 O，A，B，C をとったとき，△OAB と △OAC について，OA は共通，BO=CO= r，∠ABO= ∠ACO から，△OAB≡△OAC．∠BAC= $\pi/3$ より，∠OAB= ∠OAC= $\pi/6$．よって AB=AC= $\sqrt{3}$.

棒にかかる力は，点 B (A から $\sqrt{3}$ [m]) に作用する $\boldsymbol{F}$ と重心 (A から 1 [m]) において鉛直下向きに作用する重力の 2 つであるから，A 点まわりのモーメントのつりあい式は以下の通りとなる (反力 $\boldsymbol{R}_1$ は作用線が A 点を通るので無視して良い)

$$\sqrt{3}F - 1 \cdot m_1 g \cos(\pi/3) = \sqrt{3}F - 5 = 0$$

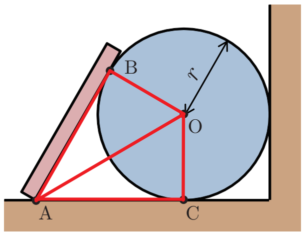


Fig. 2.7

よって $F = 5/\sqrt{3}$ ($\fallingdotseq 2.89$) [N].

$\boldsymbol{R}_1 = (R_{1x}, R_{1y})^T$ とするとき，棒の水平方向の力のつりあいは

$$R_{1x} + \cos(\pi/3 + \pi/2)F = 0$$

よって $R_{1x} = 2.5$ [N].

棒の鉛直方向の力のつりあいは

$$R_{1y} - m_1 g + \sin(\pi/3 + \pi/2)F = 0$$

よって $R_{1y} = 10 - 5\sqrt{3}/6 \fallingdotseq 8.56$ [N].

円柱の鉛直方向の力のつりあいは

$$F\sin(\pi/3 - \pi/2) - m_2 g + R_2 = 0$$

よって $R_2 = 20 + 2.5/\sqrt{3} \fallingdotseq 21.4$ [N].

(円柱のモーメントについては，受ける力の作用線がすべて中心を通るため，自ずとつりあっている．円柱の水平方向のつりあい式からは R_3 が求まる．)

2.4 トラス

1. **問題**　Fig.2.8 のトラスに図の力を加えたとき，各部材の部材力を求めよ．

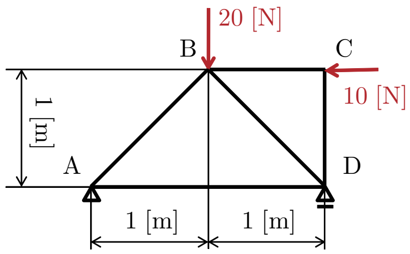


Fig. 2.8

考え方　すべての部材力を求めるので，節点法を使う．まずやるべきことは，トラス全体が外部から受けている外力を全て同定することである．を求める．このために，トラス全体を 1 つの剛体と見立て，この剛体が受けている外力をつりあい条件を利用して求める． ここで注意すべきことは，D 点は移動支点なので，環境から受ける反力は鉛直であるということである．

次に，未知力の少ない節点から順に，x 方向，y 方向の力のつりあいを求める．ちなみに，未知力が 3 以上ある節点では解けない．なぜなら，拘束条件が x，y 方向の力のつりあい式という 2 つしかないから．ジョイントはピンでつながれていて自由回転可能であり，モーメントを逃がしてしまうため，モーメントは働かないから，モーメントのつりあいは無関係.

また，節点法では節点に働く部材力を，例えば「節点 A，B をつなぐ部材から節点 A が受ける力の大きさ」を F_{AB} として変数名をつけ，**変数は部材力が引張であると仮定して設定する**．すなわち，例えば $F_{\mathrm{AB}} < 0$ であるという場合は，部材 AB は圧縮材であることになる．なお，引張力とは，「部材が」「節点を」引っ張る力である．

なお，例えば部材力 F_{AB} は「部材 AB が節点 A を引く力の大きさ」であり，これは F_{BA} すなわち「部材 AB が節点 B を引く力の大きさ」に等しい．これはベクトル量ではなくスカラ量であり，方向は図上の矢印で指定するものである．すなわち，$F_{\mathrm{AB}} = -F_{\mathrm{BA}}$ と考える必要はなく，$F_{\mathrm{AB}} = F_{\mathrm{BA}}$ として計算すればよい．

解答例　反力を $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}} = (R_{\mathrm{A}x}, R_{\mathrm{A}y})^T$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{B}}$ とする (Fig.2.9).

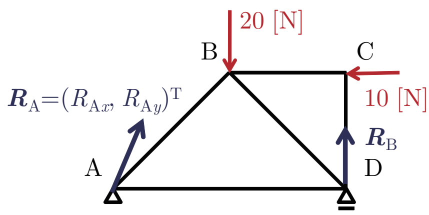


Fig. 2.9

トラス全体の x，y 方向のつりあい条件および A 点まわりのつりあい条件の式は以下の通り：

$$R_{\mathrm{A}x} - 10 = 0 \tag{2.12}$$
$$R_{\mathrm{A}y} + R_{\mathrm{B}} - 20 = 0 \tag{2.13}$$
$$-1 \cdot 20 + 2 \cdot R_{\mathrm{B}} + 1 \cdot 10 = 0 \tag{2.14}$$

以上から，$R_{\mathrm{A}x} = 10$，$R_{\mathrm{A}y} = 15$，$R_{\mathrm{B}} = 5$ [N].

以下，節点 A, C, D についての x，y 方向のつりあい条件を用いる (Fig.2.10).

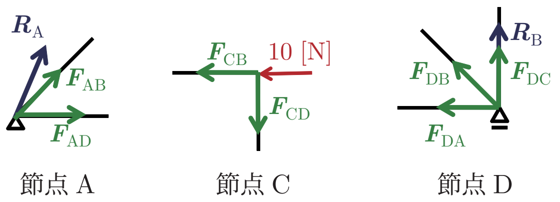


Fig. 2.10 節点 A, C, D でのつりあい

節点 A の x，y 方向のつりあい式は，

$$R_{Ax} + F_{AD} + F_{AB}\cos(\pi/4) = 0 \tag{2.15}$$

$$R_{Ay} + F_{AB}\sin(\pi/4) = 0 \tag{2.16}$$

y 方向のつりあい式から，$F_{AB} = -15\sqrt{2}$．x 方向のつりあい式に代入し，$F_{AD} = 5$．

節点 D の x，y 方向のつりあい式は，

$$-F_{DA} - F_{DB}\cos(\pi/4) = 0 \tag{2.17}$$

$$R_B + F_{DB}\sin(\pi/4) + F_{DC} = 0 \tag{2.18}$$

x 方向から，$F_{DB} = -5\sqrt{2}$, y 方向に代入して，$F_{DC} = 0$.

節点 C の x，y 方向のつりあい式は，

$$-10 - F_{CB} = 0 \tag{2.19}$$

$$F_{CD} = 0 \tag{2.20}$$

x 方向から，$F_{CB} = -10$.

以上をまとめて，部材 AB は圧縮材で圧縮力は 21.2 [N]，部材 AD は引張材で引張力は 5 [N]，部材 BC は圧縮材で圧縮力は 10 [N]，部材 BD は圧縮材で圧縮力は 7.07 [N]，部材 CD には部材力は作用していない．

2. **問題**　Fig.2.11 は，1 辺が 10 [m] の正三角形状構造を組み合わせて作られたトラスである．このトラスに図のように 4 カ所で鉛直下向きの外力をかけたとき，部材 CI および CD の部材力はどれほどか．

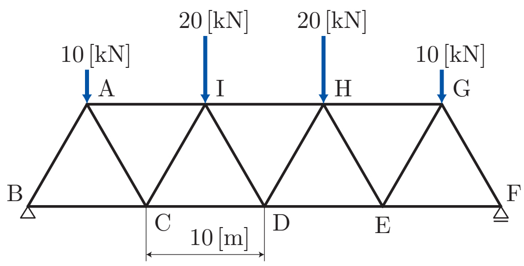


Fig. 2.11

考え方　部材 2 本の部材力をピンポイントで求めれば良いだけなので，節点法ですべての部材力を求めようとするのは労力の無駄である (もちろんそれをやっても解けるけど)．そこで，切断法を適用する．

切断法においても節点法と同様，まずやるべきことはトラスが外部から受けている力，つまり外力を同定しておくことである．このため，トラス全体を一つの剛体と見立て，この剛体に関するつりあい条件を解く．

切断法では次に，トラスを仮想的に切断するという操作を行う．部材 CD および CI を通る切断面は，部材 AI，CI，CD を切る切り方である．この切断面で切った場合，トラス構造は 2 つの剛体，△ABC および平行四辺形 IDFG が，3 本の部材 AI，CD，CI でつながれた構造となる (Fig.2.13)．

切断法では，このように 2 つの剛体に分けられた状態のトラス構造に対して，片方の剛体に関するつりあい条件を利用して部材力を求める．どちらを選ぶかは，どちらの方が計算が簡単になるかに依存するが，今回の場合，明らかに △ABC を取り扱う方が楽ちんである．

なお，節点法の場合と同様に，**部材力は引張力であるという想定で変数化する**ということに気をつけること．値が負となったら圧縮材である．

解答例　トラス全体を 1 つの剛体と考えると，トラスが受けている外力は，点 A，I，H，G において受けている鉛直下向きの外力と，点 B，F で受けている反力 (それぞれ $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$ とする) となる (Fig.2.12)．

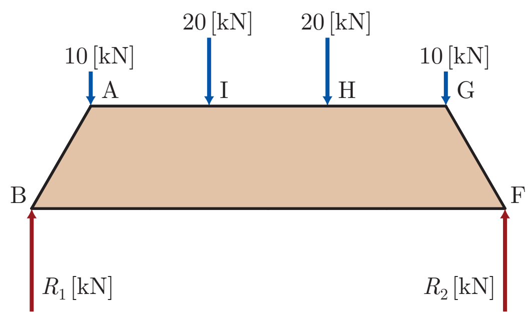


Fig. 2.12

点 F は移動支点なので，反力 $\boldsymbol{R}_2$ は鉛直上向きであり，水平方向の力のつりあいを考えると，反力 $\boldsymbol{R}_1$ も水平方向成分を持たない (他に水平方向の力が存在しないため)．

鉛直方向の力のつりあい条件から，$R_1 + R_2 = 10 + 20 + 20 + 10 = 60$ であり，点 B 周りの力のモーメントのつりあいから，$-10 \cdot 5 - 20 \cdot 15 - 20 \cdot 25 - 10 \cdot$

$35 + R_2 \cdot 40 = 0$．よって，$R_1 = R_2 = 30$.

(※ 左右対称であることを用いて 30 としてもよい)

次に，トラスを部材 AI，CI，CD を通る切断面で仮想的に切断することを考えると，トラス構造は △ABC および平行四辺形 IDFG を部材 AI，CI，CD が接続した構造と見なせる (Fig.2.13).

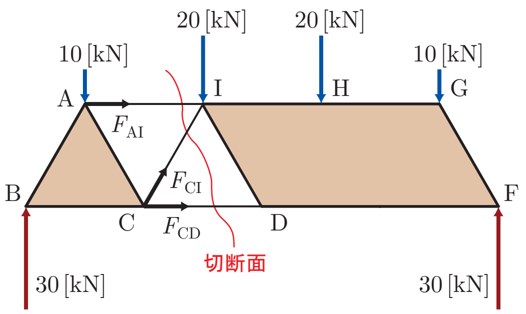


Fig. 2.13

ここで，△ABC のつりあい条件を考える．

水平方向の力のつりあい式は，右向きを正とすると

$$F_{AI} + F_{CI}\cos(\pi/3) + F_{CD} = 0 \tag{2.21}$$

鉛直方向については，上向きを正とすると

$$30 - 10 + F_{CI}\sin(\pi/3) = 0 \tag{2.22}$$

点 C まわりの力のモーメントのつりあい式は，

$$-30\cdot 10 + 10\cdot 5 - F_{AI}\cdot 10\sin(\pi/3) = 0 \tag{2.23}$$

式 (2.22) から，

$$F_{CI} = -20/\sin(\pi/3) = -40/\sqrt{3} \fallingdotseq 23.1.$$

式 (2.23) から，

$$F_{AI} = (-300 + 50)/5\sqrt{3} = -50/\sqrt{3} \fallingdotseq -28.9.$$

これらを式 (2.21) に代入して，

$$F_{CD} = -F_{AI} - F_{CI}/2 = 70/\sqrt{3} \fallingdotseq 40.4.$$

以上から，部材 CI の部材力は 23.1 [kN] の圧縮力，部材 CD の部材力は 40.4 [kN] の引張力である．

3 重 心

3.2 物体の重心

1. **問題**　Fig.3.1 のように，1 辺の長さが l, $l/2$ の正方形をつなぎ合わせ，大きい正方形の中央に半径 r の円状の穴を開けた板があるとき，その重心位置を求めよ．

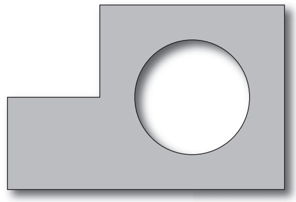


Fig. 3.1

考え方　例題 3.1, 3.2 にあるように，部分に分かれる物体は部分ごとの質量と重心から全体の重心が分かる．部分 i の質量を m_i，重心位置を $(x_i, y_i)^T$ とし，全体の質量を $M = \sum m_i$，全体の重心位置を $(x_G, y_G)^T$ とすると，

$$M\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \sum\left\{ m_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}\right\}$$

より

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\left[\sum\left\{ m_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}\right\}\right]$$

である．

一方，ある物体 A (質量 m_A，重心 $(x_A, y_A)^T$) から別の物体 B (質量 m_B，重心 $(x_B, y_B)^T$) がくりぬかれたような図形であれば，

$$(m_A - m_B)\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = m_A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} - m_B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$$

以上は，質量の代わりに面積を用いて求める重心 (図心) においても同様である．

解答例　Fig.3.2 のように，小さい正方形を部分 A，大きい (くりぬかれていない) 正方形を部分 B，円を部分 C とする．また，それぞれの面積を s_A, s_B, s_C とし，重心を $(x_A, y_A)^T, (x_B, y_B)^T, (x_C, y_C)^T$ とする．

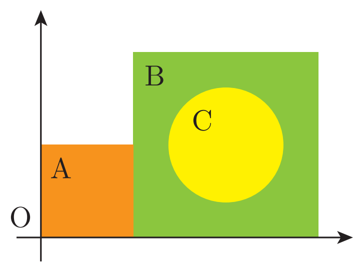


Fig. 3.2

$$s_A = \frac{l^2}{4}, \quad \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l/4 \\ l/4 \end{pmatrix}$$

$$s_B = l^2, \quad \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ l/2 \end{pmatrix}$$

$$s_A = \pi r^2, \quad \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ l/2 \end{pmatrix}$$

より，

$$\left(\frac{5l^2}{4} - \pi r^2\right)\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{l^2}{4}\begin{pmatrix} l/4 \\ l/4 \end{pmatrix} + l^2\begin{pmatrix} l \\ l/2 \end{pmatrix} - \pi r^2\begin{pmatrix} l \\ l/2 \end{pmatrix}$$

以上から，

$$x_G = \frac{4}{5l^2 - 4\pi r^2}\left(\frac{17}{16}l^3 - \pi r^2 l\right)$$
$$y_G = \frac{4}{5l^2 - 4\pi r^2}\left(\frac{9}{16}l^3 - \frac{1}{2}\pi r^2 l\right)$$

2. **問題**　Fig.3.3 のように曲線 $y = -x^2 + 1$ と x 軸に囲まれた平面図形を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ．

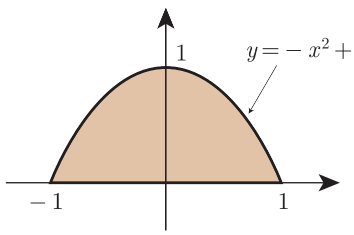


Fig. 3.3

考え方　3.2.2「回転体の重心」を参照．

曲線をある軸まわりに回転させてできる回転体の表面積は，曲線の長さを L，曲線の重心と回転軸との距離を r とするとき，

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r L \\ &= (\text{重心が回転する円周長さ}) \cdot (\text{曲線の長さ}) \end{aligned}$$

であり，平面図形をある軸周りに回転させてできる回転体の体積は，図形の面積を S，図形の重心と回転軸との距離を r とするとき，

$$\begin{aligned} V &= 2\pi r S \\ &= (\text{重心が回転する円周長さ}) \cdot (\text{図形の面積}) \end{aligned}$$

であった．

回転軸は x 軸であるから重心と回転軸との距離は平面図形の y 座標である．したがって，この平面図形の面積と重心の y 座標 y_G が求まれば回転体の体積を求められる．

重心を求めるには，図形を y 軸に平行な線で刻んでできる縦に細い板を微小部分とするのがよい．このとき，縦に細い板は厳密には上の辺が曲線ではあるが，幅が微小であるため，長方形として微小面積・重心を計算することができる．

解答例　平面図形の面積は

$$\int_{-1}^{1} -x^2 + 1 dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

また，Fig.3.4 のように，x 座標が x の位置における幅 dx の微小部分を考えると，その重心は

$$\left(x,\ \frac{-x^2+1}{2}\right)^T$$

であり，面積は $S = (-x^2 + 1)dx$ である．

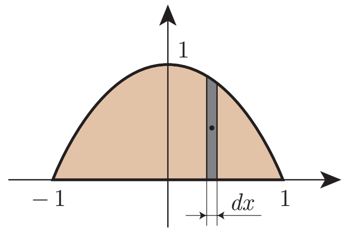


Fig. 3.4

したがって図形全体の重心の y 座標は

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{-x^2+1}{2}(-x^2+1)\ dx}{\dfrac{4}{3}} \\ &= \frac{3}{8}\int_{-1}^{1} x^4 - 2x^2 + 1\ dx \\ &= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

よって回転体の体積は

$$V = 2\pi y_G S = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{15}\pi.$$

3. **問題**　太さの無視できる長さ 40 [cm] のまっすぐな棒 AB があり，その線密度が一定でないとする．片側の端点 A から距離 x [cm] の位置の線密度は $2 + 0.15x$ [g/cm] であるとするとき，この棒の重心を求めよ．

考え方　密度が一定でないので，重心は図心 (棒の中点) には一致しない．部位ごとに密度が異なるので，部位ごとの微小質量を求めて，(質量) ·(位置) の積分を行う．

解答例　Fig.3.5 のように，端点 A から距離 x の位置に長さ dx の微小区間を考える．

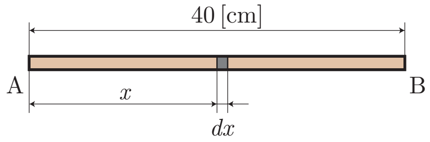


Fig. 3.5

微小区間における線密度は $2 + 0.15x$ であるから，微小区間の質量 dm は

$$dm = (2 + 0.15x)dx$$

である．したがって重心と端点 A との距離を x_G とすると，

$$x_G = \frac{\int x\ dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{40} x(2+0.15x)\ dx}{\int_0^{40} 2+0.15x\ dx}$$

$$= \frac{\left[x^2+0.05x^3\right]_0^{40}}{\left[2x+0.075x^2\right]_0^{40}} = \frac{4800}{200} = 24\ [\mathrm{cm}]$$

3.3　物体のすわり

1. **問題**　Fig.3.6 のように，1 辺が 1 [m] の正方形 OBCD から，直角三角形 OBA を切り取った形状の断面を持つ角柱があるとする．

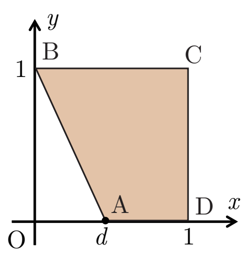


Fig. 3.6

(1) 角柱の xy 平面上の重心座標を求めよ．

(2) この角柱を水平な床に図の通りにおいたとき，安定の座りとなるための d [m] の範囲を求めよ．

考え方

(1) 正方形から直角三角形を除去したと考えれば，3.2 と同様にできる．三角形の重心位置は，点 B から OA の中点へのばしたベクトルの 2/3 を B の位置ベクトルに足せばよい．

(2) 教科書 3.3「物体のすわり」を参照．安定性の限界となるのが，重心が点 A の真上にくるときであり，この瞬間は中立のすわりになっている．重心の x 座標を x_G とすると，これが点 A より右側にあればよいので，条件は $x_G > d$ である．

解答例

(1) もとの正方形の重心座標を $(x_{\mathrm{G}_1}, y_{\mathrm{G}_1})^T$，面積を s_1，切り取った三角形の重心座標を $(x_{\mathrm{G}_2}, y_{\mathrm{G}_2})^T$，面積を s_2 とすると，

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}_1} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{G}_1} \\ y_{\mathrm{G}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad s_1 = 1$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}_2} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{G}_2} \\ y_{\mathrm{G}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{d}{2}$$

正方形から三角形を切り取った断面全体の重心を $\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}} = (x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})^T$ と置くと，以上から

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}} = \frac{s_1\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}_1} - s_2\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}_1}}{s_1 - s_2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{d}{2}}\left\{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \frac{d}{2}\begin{pmatrix} \frac{d}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{d}{2}}\begin{pmatrix} 0.5-\frac{d^2}{6} \\ 0.5-\frac{d}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3(2-d)}\begin{pmatrix} 3-d^2 \\ 3-d \end{pmatrix}$$

(2) 安定の座りとなるための条件は，重心が点 A よりも右側にあることなので，$x_G > d$．よって，

$$\frac{2}{2-d}\left(\frac{1}{2}-\frac{d^2}{6}\right) = \frac{1}{2-d}\left(1-\frac{d^2}{3}\right) > d$$

$0 < d < 1$ と仮定できるので，分母 $2-d$ は正．よって

$$1 - \frac{d^2}{3} > 2d - d^2$$

これを変形すると，

$$2d^2 - 6d + 3 > 0$$

2 次関数の不等式を解くと解は

$$d < \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \quad d > \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

これと $0 < d < 1$ を併せて，

$$0 < d < \frac{3-\sqrt{3}}{2} \fallingdotseq 0.634$$

すなわち，$0 < d < 0.634$ [m] の範囲で安定の座りである．

6 剛体の運動

6.1 剛体の回転運動と慣性モーメント

1. **問題**　中心に回転軸のある円板がある．最初静止していたこの円板に 10 [Nm] のトルクを 5 [s] かけ続けた結果，5 [s] の間の総回転量が 25 回転であった．この円板の慣性モーメントを求めよ．

考え方　角運動方程式 $N = I\dot{\omega}$ を使って慣性モーメント I を求める．かかっているトルクは $N = 10$ であるから，角加速度 $\dot{\omega}$ が分かれば I が求まる．

ここで，トルク N が一定であることから，この 5 [s] 間の運動は等角加速度運動である．等角加速度運動における回転量 $\theta(t)$ は以下の式で求まる．

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2$$

(等加速度運動における $x(t) = (1/2)at^2$ に対応)

これを用いて $\dot{\omega}$ を求め，あとは角運動方程式に代入すればよい．

解答例　5 [s] の間にかかったトルクは一定で $N = 10$ [Nm] であり，円板の慣性モーメントを I [kg m^2]，角加速度を $\dot{\omega}$ [rad/s] とすると角運動方程式 $N = I\dot{\omega}$ から $\dot{\omega}$ も一定である．すなわち等角加速度運動であり，5 [s] 間の総回転量が $25 \cdot 2\pi = 50\pi$ [rad] であるから，

$$\frac{1}{2}\dot{\omega}5^2 = 50\pi$$

よって $\dot{\omega} = 4\pi$ [rad/s^2]．したがって角運動方程式から，

$$I = \frac{N}{\dot{\omega}} = \frac{10}{4\pi} \fallingdotseq 0.796 \text{ [kg m}^2\text{]}$$

6.3 断面二次モーメント

1. **問題**　下図のような断面をもつ鉄骨があるとするとき，一点鎖線で示した回転軸周りの断面二次モーメントを求めよ．

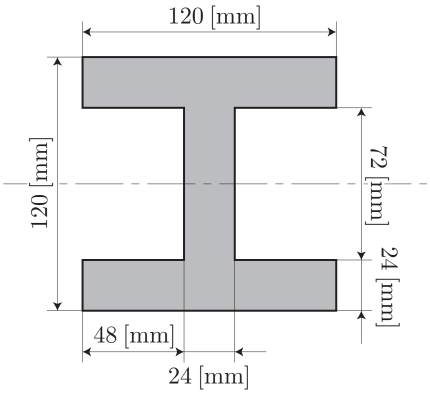


Fig. 6.1

考え方　断面二次モーメントは，質量の代わりに面積を用いて求める慣性モーメントである．平面上の微小部位の面積を dA，その軸からの距離を r とすると，断面二次モーメントは

$$I' = \int r^2 \, dA$$

と求まる．

長方形板の慣性モーメントの値が 6.4 節で分かっているとすれば，鉄骨断面を Fig.6.2 のように 3 つの長方形に分割し，それぞれの長方形の軸 L 周りの断面二次モーメントを求めて合計できる．または，正方形の断面二次モーメントから 2 つの長方形の断面二次モーメントを抜いても良い．

長方形 A および C の軸 L 周りの慣性モーメントは等しく，それぞれの L 周りの断面二次モーメントを求めるに当たっては，まず長方形 A の図心 $\mathrm{G_A}$ を通り回転軸に平行な軸 $\mathrm{L_A}$ 周りの断面二次モーメントを求めてから，平行軸の定理を適用する．

解答例　Fig.6.2 のように，鉄骨断面を 3 つの長方形 A，B，C に分割する．長方形 A，B の重心をそれぞれ $\mathrm{G_A}$，$\mathrm{G_B}$ とし，所与の回転軸を L，L に並行で $\mathrm{G_A}$ を通る軸を $\mathrm{L_A}$ とする．このとき，長方形 A および C は軸 L について対称的であるから，それぞれの軸 L 周りの断面二次モーメント I'_A と I'_C は等しい．

長方形 A の面積は $120 \cdot 24 = 2880$ [mm^2] であるから，$\mathrm{L_A}$ 周りの断面二次モーメント $I'_{\mathrm{G_A}}$ は，

$$I'_{\mathrm{G_A}} = \frac{2880 \cdot 24^2}{12} = 138240 \text{ [mm}^4\text{]}$$

である．これに平行軸の定理を適用して，

$$I'_A = I'_{\mathrm{G_A}} + 48^2 \cdot 2880 = 6773760 \text{ [mm}^4\text{]}$$

である．

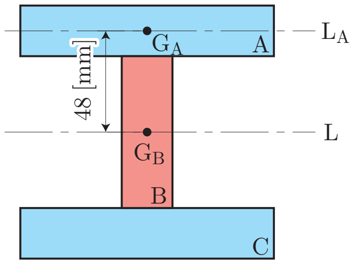


Fig. 6.2

一方，長方形 B の面積は $24 \cdot 72 = 1728$ [mm^2] であり，重心は軸 L 上にあるから，

$$I'_B = \frac{1728 \cdot 72^2}{12} = 746496 \text{ [mm}^4\text{]}$$

以上から，全体の断面二次モーメントは

$$I' = 2I'_A + I'_B = 14294016 \fallingdotseq 1.43 \times 10^7 \text{ [mm}^4\text{]}$$

6.4 簡単な物体の慣性モーメント

1. **問題**　正方形と 2 等辺三角形を接合した Fig.6.3 のような厚みの無視できる板があるとする．

(1) 板の重心 G の座標を求めよ．

(2) 板を x 軸および y 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ求めよ．

(3) 板の面密度を 2 [g/cm^2] とする．G を通り x 軸に平行な直線を L_x とするとき，L_x まわりおよび y 軸まわりの板の慣性モーメント $I_{\mathrm{G}x}$，I_y を求めよ．

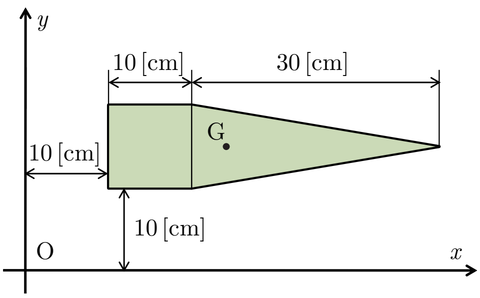


Fig. 6.3

考え方

(1) n 個の物体を接合した物体の重心を求める場合，物体 i の質量を m_i，重心位置を $(x_i, y_i)^T$ とし，全体の質量を $M(=\sum m_i)$，全体の重心を $(x_G, y_G)^T$ とすると

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right\}$$

(2) 面積 A の平面図形をある軸まわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，平面図形の重心と軸との距離を r とするとき，$2\pi r A$ である (教科書 3.2.2 項「回転体の重心」)．

(3) 四角形および三角形それぞれの重心を通り x 軸および y 軸に平行な軸まわりの慣性モーメントは教科書の表 6.1 の通り．分からなくても積分で求められる．平行軸の定理を使ってこれらを L_x 軸まわり，y 軸まわりに変換し，合算すればよい．

解答例

(1) 正方形の重心は $(15, 15)^T$，面積は 100．三角形の重心は $(30, 15)^T$，面積は 150 である．従って全体の重心 G の座標を $(x_G, y_G)^T$ とすると，

$$(100+150) \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} + 150 \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ [cm]}$$

(2) G と x 軸，y 軸との距離はそれぞれ 24，15 なので，それぞれの軸まわりに回転した回転体の体積はそれぞれ

$$2\pi \cdot 15 \cdot 250 \fallingdotseq 23600 \text{ [cm}^3\text{]} \quad (x \text{ 軸まわり})$$
$$2\pi \cdot 24 \cdot 250 \fallingdotseq 37700 \text{ [cm}^3\text{]} \quad (y \text{ 軸まわり})$$

(3) 正方形について，その重心を通り x 軸，y 軸に平行な軸まわりの慣性モーメントはともに $(2 \cdot 10^2 \cdot 10^2)/12 = 5000/3$．三角形について，その重心を通り x 軸，y 軸に平行な軸まわりの慣性モーメントはそれぞれ

$$\frac{150 \cdot 2}{18}(10^2 - 10 \cdot 5 + 5^2) = 1250$$

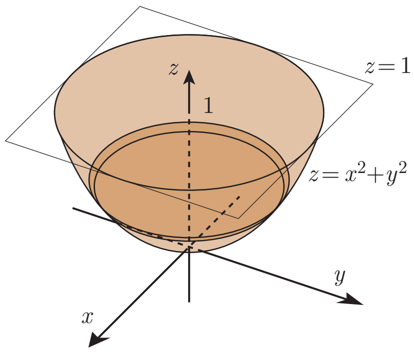
$$\frac{150 \cdot 2 \cdot 30^2}{18} = 15000$$

以上から L_x まわりの慣性モーメントは $5000/3 + 1250 \fallingdotseq 2920$ [g·cm^2]．y 軸まわりの慣性モーメントは，正方形および三角形の重心と y 軸との距離がそれぞれ 15，30 であることから平行軸の定

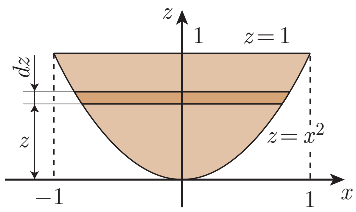
理を適用して

$$\left(\frac{5000}{3}+200\cdot 15^2\right)+(15000+300\cdot 30^2)$$
$$\fallingdotseq 332000\ [\mathrm{g\cdot cm^2}]=0.0332\ [\mathrm{kg\cdot m^2}]$$

2. **問題**　Fig.6.4 のように放物面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=1$ とに囲まれた立体図形の形状をした物体を考える．長さの単位は [cm] とし，物体の密度は 2 [g/cm^3] であるとする．



(a) 斜め方向から



(b) xz 平面 $(y=0)$ での断面

Fig. 6.4

(1) xy 平面からの距離 z の位置に，厚み dz の微小部分をとるとき，微小部分の質量を求めよ．

(2) 物体の重心位置を求めよ．

(3) 物体の x 軸まわりの慣性モーメントを求めよ．

考え方

(1) 微小部分の体積に密度をかければよい．体積を求めるに当たっては，厚み dz が微小であることから，微小部分を半径 r，厚み dz の円板と見なすことができる (端面が傾いているが，その部分の体積は dz^2 に比例するため，無視できる)．端面上で $z=x^2+y^2=r^2$ が成り立つことを利用すれば，底面積は $\pi r^2=\pi z$ である．

(2) 微小部分の重心が z 軸上にあることから，物体全体の重心は z 軸上にある．その z 座標 z_{G} は，以下の通り求まる．

$$z_{\mathrm{G}}=\frac{\displaystyle\int z\ dm}{\displaystyle\int dm}$$

(3) 微小部分の x 軸周りの慣性モーメントを求められれば，これを物体全体にわたって積分することで物体全体の慣性モーメントが求まる．Fig.6.5 のとおり，微小部分の中心 $(0,0,z)^{\mathrm{T}}$ を通り x 軸に平行な軸を L $(y=z=0)$ とすると，微小部分の L 軸まわりの慣性モーメント dI_{L} は円板の慣性モーメントの式を使って直ちに求まる．すると微小部分の x 軸まわりの慣性モーメント dI_x は，平行軸の定理を使って $dI_x=dI_{\mathrm{L}}+z^2dm$ と求まる．

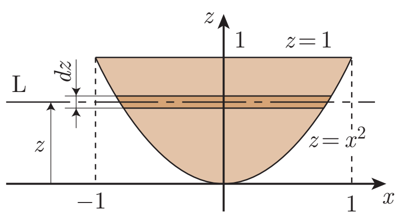


Fig. 6.5

解答例

(1) 微小部分は半径 $r=\sqrt{z}$，厚み dz の円板と見なせるので，その体積は $dA=\pi r^2dz=\pi z dz$ [cm^3]．したがってその質量は密度 $\rho=2$ より $dm=\rho dA=2\pi z\ dz$ [g] と求まる．

(2) z 軸に垂直な平面による物体の断面は円形であり，その中心は z 軸上にあることから，重心は z 軸上にある．その z 座標を z_{G} とおくと，

$$z_{\mathrm{G}}=\frac{\displaystyle\int z\ dm}{\displaystyle\int dm}=\frac{\displaystyle\int_0^1 2\pi z^2\ dz}{\displaystyle\int_0^1 2\pi z\ dz}=\frac{\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^1}{\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1}$$
$$=\frac{2}{3}\fallingdotseq 0.677\ [\mathrm{cm}]$$

(3) Fig.6.5 のように微小部分の重心を通り x 軸に平行な軸 L を考えると，微小部分は薄い円板と見なせるため，その L 軸まわりの慣性モーメントは，

$$dI_{\mathrm{L}}=\frac{dm\cdot r^2}{4}=\frac{1}{2}\pi z^2dz.$$

これに平行軸の定理を適用して，微小部分の x 軸

まわりの慣性モーメントは

$$dI_x = dI_{\rm L} + z^2 \cdot dm = \frac{1}{2}\pi z^2 dz + 2\pi z^3 dz$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2}z^2 + 2z^3\right) dz$$

したがって物体全体の慣性モーメントは

$$I_x = \int dI_x = \pi \int_0^1 \frac{1}{2}z^2 + 2z^3 \ dz$$
$$= \pi\left[\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}z^4\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi = 2.09 \ [\text{g cm}^2]$$

6.5　剛体の平面運動

1. **問題**　Fig.6.6 のように，三輪車のハンドルを θ [rad] 切った状態で，前輪の速度が $\boldsymbol{v}$ [m/s] で進んでいるとする．車輪は横滑りせず，車輪の移動速度は車軸方向の成分を持たないと仮定する．

前輪の中心を A，左右の後輪の中心を B，C とし，その中点を O とする．また，後輪の車軸と A との距離 (ホイールベース) を b [m]，中心軸と後輪中心の距離を w [m] とする．

(1) 三輪車の運動の瞬間中心および左右の後輪の速度を求めよ．

(2) 点 O の速度および角速度を求めよ．

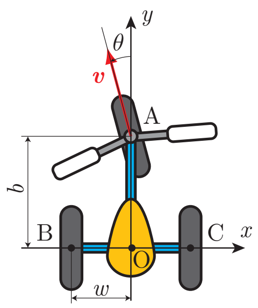


Fig. 6.6

考え方

(1) 車輪の速度は車軸方向成分を持たないことから，後輪の速度は y 軸方向に限定される (y 軸の正の方向か負の方向かは θ に依存する)．教科書 6.5.1 項の説明にあるとおり，瞬間中心は物体上の 2 点の瞬間速度ベクトルに直交する直線の交点であり，後輪の速度ベクトルは y 軸に平行であるから，瞬間中心は x 軸上，かつ，前輪に直交する直線上である．ただし，$\theta = 0$ の場合は回転がゼロとなる点に注意．

(2) 三輪車全体において角速度 ω は共通であり，これは簡単に求められる．これらに基づいて，速度の分かっている点 A を基準点として，教科書 6.5.2 項と同様にして点 O の速度を求めればよい．

解答例

(1) 車輪は横滑りしないことから後輪の速度は y 軸に平行である．

$\theta = 0$ の場合，三輪車は y 軸正の方向に並進運動をするため，各車輪は同一速度 $\boldsymbol{v}$ を持ち，瞬間中心は x 軸上無限遠となる．

$\theta \neq 0$ のとき，瞬間中心は車輪中心位置から速度に直交する方向にあることから，瞬間中心は x 軸上にあり，かつ，同時に瞬間中心は前輪の中心から速度 $\boldsymbol{v}$ に直交する方向にある．したがって，Fig.6.7 の幾何学的関係から，瞬間中心の座標は $(-b/\tan\theta, 0)^T$ [m] となる．

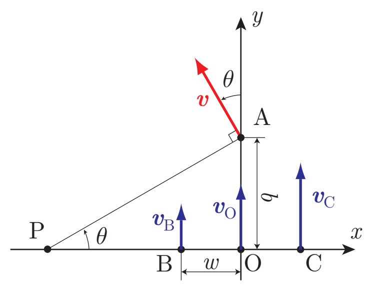


Fig. 6.7

各車輪は瞬間中心の周りに回転運動を行うため，その速さは回転半径に比例する．点 A の回転半径は AP $= b/\sin\theta$ であり速さは v である．後輪 B，C の回転半径はそれぞれ $-w + b/\tan\theta$，$w + b/\tan\theta$ であり，これが負の値であるときは後輪は y 軸負の方向の速度を持つ．したがって，車輪 B，C は y 軸正の方向に向かって以下の速度を持つ．

$$v_B = \frac{v\sin\theta}{b}\left(-w + \frac{b}{\tan\theta}\right)$$
$$= \frac{v}{b}(-w\sin\theta + b\cos\theta) \ [\text{m/s}]$$

$$v_C = \frac{v\sin\theta}{b}\left(w + \frac{b}{\tan\theta}\right)$$
$$= \frac{v}{b}(w\sin\theta + b\cos\theta) \ [\text{m/s}]$$

(2) $\theta = 0$ のとき，三輪車は方向を変えないため，角速度は 0 [rad/s] である．また，速度は点 A と点 O で同じであり，v [m/s]．$\theta = 0$ であるから速度の向きは y 軸正の方向である．

一方，$\theta \neq 0$ のとき，角速度は点 A の速さを回転半径で割った値であるから，

$$\omega = \frac{v\sin\theta}{b} \text{ [rad/s]}$$

である．この値は三輪車全体にわたって同一である．

点 O は点 A に対して，角速度 ω の回転運動をしている．

したがって，点 A に対する点 O の相対速度は，x 軸正の向きに $b\omega = v\sin\theta$．これを点 A の速度 $\boldsymbol{v} = (-v\sin\theta, v\cos\theta)^T$ に加えて，点 O の速度は

$$\boldsymbol{v}_O = \begin{pmatrix} -v\sin\theta + v\sin\theta \\ v\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v\cos\theta \end{pmatrix}$$

すなわち，y 軸正の向きに $v\cos\theta$ [m/s] である．

※ 実は，$\theta \neq 0$ に対して求めた上の式は，そのまま $\theta = 0$ の場合も含めて適用可能である．また，別の極端な例として $\theta = \pi/2$ のとき (ハンドルを直角に曲げたとき) は，$\tan\theta \to \infty$ の極限により瞬間中心は原点となって，左右の後輪は逆方向に動く．

※ このような計算は，車輪型移動ロボットの制御において用いられる．車輪型移動ロボットについて興味がある学生は，城間研，青島研が公開されるチャンスなどを活かすと良い．例えば城間研では，ホイールローダの自動操縦の研究などを行っている．

もう一つありがちなロボットの例として，2 駆動輪独立駆動型 (2DW 型) というものがある．この場合，前輪は全方向に自由に動くキャスタなどとし，後輪 2 つの速度を独立にモータで制御する．左右の車輪が v_L, v_R の速さで動くときの中心位置の速度・角速度を求めてみよ．また，自動車のステアリングにおいて，左右の車輪のステアリング角・速さが同じだと横滑りが生じる．横滑りが生じない条件を求めてみよ．

6.6 剛体の平面運動の方程式

1. **問題**　無重力空間において，質量 100 [kg]，半径 2 [m] の円板が 3 [rad/s] で回転しながら，その重心は x 軸方向に 2 [m/s] で進んでいる．ある瞬間に，円板の中心は座標 $(3, 3)^T$ [m] にあった．このとき Fig.6.8 の点 A に 500 [N] の力を加えたとする．この瞬間の点 B の速度・加速度を求めよ．

   考え方　力を加えた**瞬間**においては，加速度・角加速度は受けていても，速度・角速度はまだもとのままで

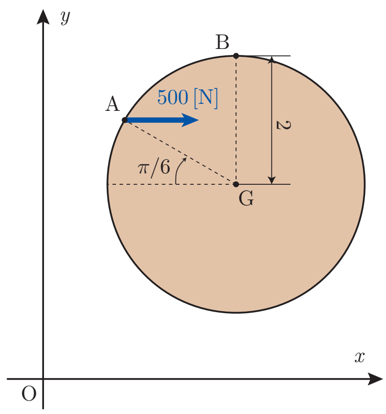


Fig. 6.8

   あり，その値を使えばよい．あとは教科書 6.5.2 項の議論をそのまま使える．

   解答例　以下，円板の質量を m (= 100) [kg]，慣性モーメントを I [kgm^2]，半径を r (= 1) [m]，円板が受ける力のモーメントを N [Nm]，円板の角速度を ω (= 3) [rad/s]，角加速度を $\dot{\omega}$ [rad/s^2]，G の加速度を a [m/s^2] と表記する．

   G の速度は $(2, 0)^T$ [m/s] であり，G に対する B の相対速度は $r\omega = 2 \cdot 3 = 6$ [m/s] (x 軸 負の方向) である．従って B の絶対速度は $(2-6, 0)^T = (-4, 0)^T$ [m/s] である．

   円板の慣性モーメントは $I = (m/2)r^2 = (100/2) \cdot 2^2 = 200$ [kgm^2] であり，加えた力により生じる力のモーメントは $N = 500 \cdot (-1) = -500$ [Nm] であるから，それにより生じる角加速度は $\dot{\omega} = N/I = -500/200 = -2.5$ [rad/s^2]．G が受ける加速度は $a = 500/m = 500/100 = 5$ [m/s^2] であり，B が G に対して持つ相対加速度は，x 軸右向きに $|r\dot{\omega}| = 2 \cdot 2.5 = 5$ [m/s^2]，y 軸下向きに $r\omega^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$ [m/s^2] である．これらを総合して，B の絶対加速度は $(a + |r\dot{\omega}|, -r\omega^2)^T = (10, -18)^T$ [m/s^2]．

2. **問題**　Fig.6.9 のように傾斜 $\pi/6$ [rad] の坂の上に質量 $m = 20$ [kg]，半径 $r = 1$ [m] の直円柱をおき，巻き付けたワイヤを $T = 300$ [N] の力で引っ張って持ち上げることを考える．斜面から受ける垂直抗力を $\boldsymbol{R}$，摩擦力を $\boldsymbol{F}$ とおく．x 軸を斜面上向きを正としてとるとき，円柱重心の加速度 a [m/s^2] を求めよ．

   ただし，重力加速度は $g = 10.0$ [m/s^2] とする．

   考え方　例題 6.6 の拡張版．問題は複雑になっているが，「運動方程式＋角運動方程式＋滑らないという拘

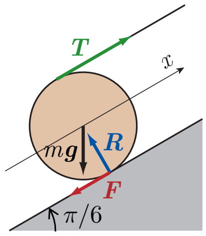


Fig. 6.9

束」を使って解くという意味では同じ．

解答例　円柱が受けている力は，重心にかかる重力 $m\boldsymbol{g}$ ($mg = 200$ [N])，ワイヤ張力 $\boldsymbol{T}$ ($T = 300$ [N])，摩擦力 $\boldsymbol{F}$，垂直抗力 $\boldsymbol{R}$ であり，円柱重心は斜面に平行な方向にのみ動くことから，重力の斜面に垂直な方向の成分 $mg\cos(\pi/6) = (\sqrt{3}/2)mg$ は垂直抗力 R とつりあっている．

斜面に平行な方向についての円柱重心の運動方程式は

$$T - F - \sin(\pi/6)mg = ma$$

であり，

$$200 - F = 20a \tag{6.1}$$

重心まわりの円柱の慣性モーメントを I とすると，重心まわりの円柱の角運動方程式は

$$-(T + F)r = I\dot{\omega}$$

ここで，$I = mr^2/2 = 10$ [kg·m^2] であるから，

$$-(300 + F) = 10\dot{\omega} \tag{6.2}$$

また，円柱と斜面の間に滑りが生じないことから

$$a = -r\dot{\omega}$$

よって

$$a = -\dot{\omega} \tag{6.3}$$

式 (6.3) を式 (6.2) に代入して

$$300 + F = 10a \tag{6.4}$$

式 (6.1) と式 (6.4) を足して F を消去し

$$500 = 30a$$

よって $a = 50/3 \fallingdotseq 16.7$ [m/s^2]．

(斜面との摩擦をゼロとし，回転が起こらないと仮定すると，$a = (T - mg/2)/m = 10$ [m/s^2] であり，上記計算結果はこれよりも速い加速をしているという結果である．これは，張力 T により発生する摩擦力 F がさらに加速に寄与することから起こる現象である．)

3. **問題**　Fig.6.10 に示すように，質量 $m_1 = 10$ [kg]，半径 $r = 0.2$ [m] の円板状の滑車の軸に取り付けたワイヤから質量 $m_2 = 5$ [kg] の荷物を吊り下げ，滑車に回したワイヤの片方を天井に固定，他方を上向きに $F = 100$ [N] で引き上げたところ，滑車は上向きの加速度 a [m/s^2] で加速した．この際，滑車に巻きつけたワイヤに滑りは生じなかったとする．このとき，天井につないだワイヤの張力 T [N] および加速度 a [m/s^2] を求めよ．なお，重力加速度は $g = 10.0$ [m/s^2] として計算せよ．

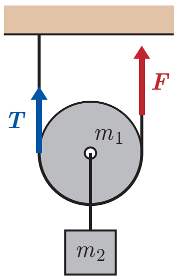


Fig. 6.10

考え方　並進運動と回転運動を同時に行う剛体の運動を解析するには，並進運動の基本式である Newton の運動方程式，回転運動の基本式である Euler の運動方程式 (角運動方程式) を連立させて用いる Newton-Euler 法を用いる．ただし，この 2 式では未知数が 2 までの場合しか解けず，この問題での未知数は加速度 a，角加速度 $\dot{\omega}$ および左側ワイヤ張力 T の 3 つあり，充足しない．そこで滑車にかかるワイヤがすべらない条件を利用する．

運動方程式においては並進運動するのは滑車と荷物双方であり，角運動方程式では回転運動するのは滑車のみである点に注意．また，ワイヤがすべらない条件において，滑車と荷物が上向きに加速するとき滑車の回転は反時計回りに加速するので，式にマイナスはつかない．滑車が角度 θ [rad] 回ると左側ワイヤは $r\theta$ [m] 巻き取られ，その分滑車の位置が上がるので，$a = r\dot{\omega}$ という式になる．

解答例　滑車にかかる力は，両側ワイヤの張力 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{F}$ および重心にかかる滑車の重力 $m_1\boldsymbol{g}$，荷物が滑車の軸を引く力 $m_2\boldsymbol{g}$ である．滑車にかかる力のモーメン

トは Fr および $-Tr$ である．

滑車と荷物の並進運動に関する運動方程式は

$$(m_1 + m_2)a = F + T - (m_1 + m_2)g, \tag{6.5}$$

滑車の慣性モーメントを $I\ (= m_1 r^2/2)$ とすると，滑車の回転運動に関する角運動方程式は

$$(F - T)r = I\dot{\omega} = \frac{1}{2}m_1 r^2 \dot{\omega}, \tag{6.6}$$

滑車にかかるワイヤがすべらない条件は

$$a = r\dot{\omega} \tag{6.7}$$

である．

(※ 滑車と荷物の並進運動を一体として考えず，運動方程式を滑車と荷物で分けて書く場合は，滑車と荷物の間の張力を T' などの変数とすると，荷物の運動方程式が

$$T' - m_2 g = m_2 a,$$

滑車の運動方程式が

$$F + T - m_1 g - T' = m_1 a$$

となり，T' を消去すると式 (6.5) と同値になる.)

式 (6.6) の両辺を r で割り，これに式 (6.7) を代入すると

$$F - T = \frac{1}{2}m_1 r\dot{\omega} = \frac{1}{2}m_1 a \tag{6.8}$$

これを式 (6.5) に代入すると

$$(m_1 + m_2)a = 2F - \frac{1}{2}m_1 a - (m_1 + m_2)g$$

これを a について解いて，

$$a = \frac{2F - (m_1 + m_2)g}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 2.5\ [\mathrm{m/s^2}]$$

式 (6.8) に代入して，

$$T = F - \frac{1}{2}m_1 a = 87.5\ [\mathrm{N}].$$

6.7　回転体のつりあい

1. **問題**　Fig.6.11 に示すように，両端を軸受で固定した長さ 1 [m] の軸に，半径 40 [cm]，質量 30 [kg] の薄い円板と，質量 m_1，m_2 [kg] の小さな鉄球が取り付けられているとする．このとき，軸の静的および動的つりあいをとるには，質量 m_1，m_2 はどう与えるべきか求めよ．

   考え方　回転体のつりあいを取る上で考えるべき 2 つの項目は以下のとおりである．

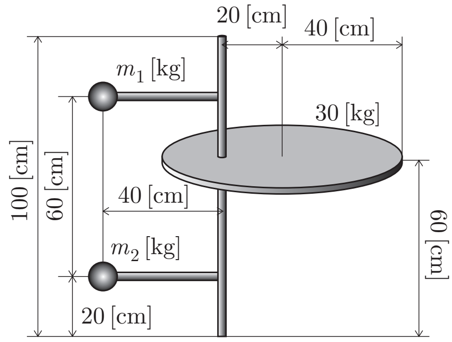


Fig. 6.11

(1) **静的つりあい** 軸を回転させたとき，軸に取り付けた各物体に作用する遠心力の合力が $\mathbf{0}$ となる．→ 軸がいずれの方向にも並進運動に関する加速度を受けない (軸はどちらにも持っていかれそうにならない)

(2) **動的つりあい** 軸を回転させたとき，軸に取り付けた書く物体に作用する遠心力が作る力のモーメントの合計が 0 となる．→ 軸はいずれの方向にも回り始めようとしない．

軸に取り付けた物体 i の質量を m_i，物体 i の重心と軸との距離を r_i，軸上のある点 A から物体 i の重心までの軸に沿った距離を a_i とすると，軸が角速度 ω で回転するとき，物体 i が受ける遠心力の大きさは $f_i = m_i r_i \omega^2$ であり，この力が点 A まわりに作り出す力のモーメントの大きさは $N_i = f_i a_i = a_i m_i r_i \omega^2$ となる．

ここで注意すべき点は，物体 i が受ける遠心力がベクトルであるということで，その方向を考える必要がある．遠心力の方向は回転軸に垂直で，回転軸から遠ざかる方向である．Fig.6.11 の例では，すべての物体は紙面上に存在するため，遠心力ベクトルも紙面に沿った方向となるが，物体の位置が紙面奥行き方向にずれている場合，遠心力ベクトルも奥行き方向の成分を持つ．このときは，力および力のモーメントの双方について，紙面上左右方向と紙面奥行き方向の 2 つの方向のつりあいを同時に満たすことを考えなければならない．つまりこの場合，つりあい式は合計 4 本となる．

さて，軸を真横から見ると Fig.6.12 のようになる．ただし円板が受けている遠心力を $\boldsymbol{F}_0$，2 つの球が受けている遠心力をそれぞれ $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ としている．

静的つりあいを取るには，$\boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \mathbf{0}$ とすればよく，動的つりあいを取るには，3 つの力が作り出す力のモーメントの合計が 0 という式を，任意の点ま

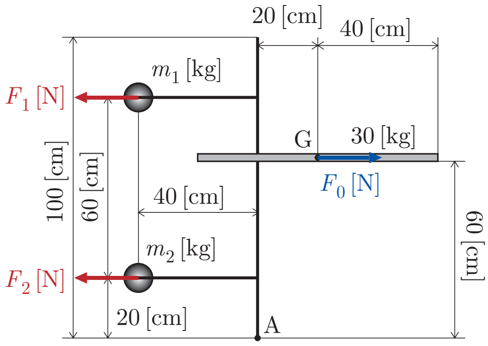


Fig. 6.12

わりに関して立てればよい.

解答例　Fig.6.12 に示すように，円板および 2 つの鉄球に作用する遠心力をそれぞれ $\boldsymbol{F}_0$，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ とすると，軸が角速度 ω [rad/s] で回転するとき，それぞれの力の大きさは

$$F_0 = 30 \cdot 0.2 \cdot \omega^2 = 6\omega^2$$
$$F_1 = 0.4m_1\omega^2$$
$$F_2 = 0.4m_2\omega^2$$

静的つりあい条件から $\boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ なので，

$$6\omega^2 = 0.4m_1\omega^2 + 0.4m_2\omega^2.$$

よって

$$m_1 + m_2 = 15 \tag{6.9}$$

それぞれの力による図上の点 A まわりの力のモーメントを考えると，動的つりあい条件は

$$-0.6F_0 + 0.8F_1 + 0.2F_2 = 0$$

よって $-3.6 + 0.32m_1 + 0.08m_2 = 0$ より

$$4m_1 + m_2 = 45 \tag{6.10}$$

式 (6.9) と式 (6.10) より，$m_1 = 10$，$m_2 = 5$ [kg].

7　衝 突

7.1　運動量と力積

1. **問題**　滑らかな水平面上に静止している質量 20 [kg] の物体にロボットハンドによって水平な力を 2 [s] の間加えたところ，物体は等速直線運動をはじめた．この際ロボットハンドが物体に与えた力は Fig.7.1 に示す通り，時間を t [s] として，

$$f(t) = 4t - 2t^2 \text{ [N]} \quad (0 \le t < 2)$$

であった．

(1) 2 [s] 後までに物体が受けた力積を求めよ．

(2) 2 [s] 後の時点で物体がもっている運動量の大きさを求め，それに基づいて以後の物体の運動の速さを求めよ．

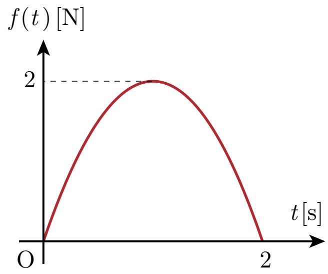


Fig. 7.1

考え方

(1) 物体が一定力 $\boldsymbol{f}$ [N] を t [s] の間受け続けた場合，受けた力積は $\boldsymbol{f}t$ [Ns] (= [kg m/s]) と計算できるが，力が一定でなかった場合は，時刻 t において受けた力を $\boldsymbol{f}(t)$ として，力積は以下のように積分により計算される．

$$\int_0^t \boldsymbol{f}(t)\ dt$$

(2) 受けた力積は獲得した運動量に等しく，初期状態で運動量は 0 であったのだから，2 [s] 以降で物体が持つ運動量は，力の方向と同一方向であり，その大きさは受けた力積に等しい．そして，運動量は $m\boldsymbol{v}$ と定義されるので，速さ (速度の大きさ) v は，運動量を質量 m で割った値である．

解答例

(1) 力積の定義により，

$$\int_0^2 f(t)\ dt = \int_0^2 4x - 2x^2\ dt$$
$$= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$= \frac{8}{3} \fallingdotseq 2.67 \text{ [Ns]}$$

(2) 押される前の物体の運動量の大きさは 0 であるから，押された後の物体の運動量の大きさは，受けた力積に等しい．したがって，2 [s] 以後の物体の運動量は 8/3[kg m/s].

運動量の定義から，質量を m，速さを v とすると $mv = 8/3$．よって，

$$v = \frac{8/3}{20} = 0.133\text{[m/s]}$$

7.2　角運動量

1. **問題**　長さ $l = 40$ [mm]，幅 $w = 10$ [mm]，厚み $d = 3$ [mm]，密度 $\rho = 0.005$ [g/mm^3] の板の端から 5 [mm] の位置に Fig.7.2 に示すように固定軸が取り付けられているとする．

   板の中心線と x 軸とのなす角を θ [rad] とし，初期状態において板は $\theta = 0$ で静止していたとする．この軸に 2 [μNm] のトルクを 2 [s] の間かけた．

   (1) 板が受けた角衝撃量を求めよ．
   (2) 上の結果に基づき 2 [s] 後の板の角速度を求めよ．

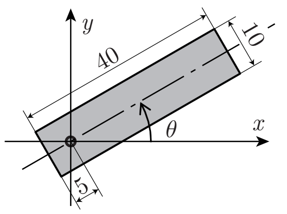


Fig. 7.2

考え方

(1) 定義から，角衝撃量は受けた力のモーメントとその時間との積である．角衝撃量の次元は (力のモーメント) × (時間) (= (質量) × (長さ)^2 × (時間)) である．

なお, この問題のように単位が MKS 単位系 ([m], [kg], [s]) と異なる場合，MKS 系に変換して計算するとミスが少なくなる場合もある．

(2) 板の重心周りの慣性モーメントは，直方体の慣性モーメント (長さ b，幅 c，質量 M のとき $I_{\mathrm{G}} = (M/12)(b^2 + c^2)$) として求まる．また，板の重心と軸との距離を δ として，軸周りの慣性モーメントを $I = I_{\mathrm{G}} + \delta^2 M$ として求める．

初期状態で板は静止していたことから，2 [s] 後の板の角運動量 L は受けた角衝撃量に等しい．よって $L = I\omega$ より ω が求まる．

解答例

(1) $2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 4.00 \cdot 10^{-6}$ [Nms]

(2) 板の質量は $m = \rho l w d = 0.005 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 3 = 6$ [g] $= 6 \cdot 10^{-3}$ [kg]．板の重心を通り固定軸と平行な軸周りの板の慣性モーメントを I_{G} とすると，

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{G}} &= \frac{6 \cdot 10^{-3}}{12}(40^2 + 10^2) \\
&= 0.85\ [\mathrm{kg \cdot mm^2}] \\
&= 8.50 \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]
\end{aligned}
$$

固定軸と重心との距離は $\delta = 15$ [mm] $= 0.015$ [m] であるから，固定軸周りの慣性モーメントは

$$
\begin{aligned}
I &= I_{\mathrm{G}} + \delta^2 m \\
&= 8.50 \cdot 10^{-7} + 6 \cdot 10^{-3} \cdot 0.015^2 \\
&= 2.20 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]
\end{aligned}
$$

初期状態で板は静止しており，初期の角運動量は 0 であるから，2 [s] 後の角運動量は受けた角衝撃量に等しく，$L = 4.00 \cdot 10^{-6}$ [Nms]．この時点での角速度を ω [rad/s] とすると，$L = I\omega$ より，$\omega = L/I \fallingdotseq 1.82$ [rad/s]．

7.3　運動量保存の法則

1. **問題**　Fig.7.3 に示すように，宇宙空間において同一直線上を慣性航行[*1]する 2 隻の宇宙船 A，B があるとする．前方を行く宇宙船 A は質量 10 [t] であり，さらに質量 2.5 [t] の装置 C を載せている．一方，後方を行く宇宙船 B は質量が 7.5 [t] であるとする．

   観測者のいる宇宙ステーションから見て，当初 2 隻の宇宙船の速度は双方とも，右向きに 20 [m/s] であった．

Fig. 7.3

ある時点において宇宙船 A は，搭載されたロボットアームを用いて装置 C を後ろ向きに射出した．このとき，射出された装置 C の速度は宇宙船 B から見て自分に向かって 10 [m/s] であった．その後，宇宙船 B は装置 C をロボットアームを使って回収し，内部に格納した．

装置 C の受け渡しの後において，宇宙船 A，B それぞれの宇宙ステーションから見た速度を求めよ．

考え方　装置 C を射出した後の宇宙船 A の速度は，射出前後における宇宙船 A と装置 C の運動量の和が一定であること (運動量保存則) から導出できる．一方，装置 C 受領後の宇宙船 B の速度は，宇宙船 B と装置 C における運動量保存則を用いる．

[*1] ロケット噴射などを一切行わず，加速度 0 で航行すること

解答例　装置 C の受け渡しの後の宇宙船 A，B の宇宙ステーションから見た右向きの速度をそれぞれ v_A，v_B とする．

装置 C 射出直後において，宇宙船 B の速度は依然右向き 20 [m/s] であり，これから見て射出後の装置 C の速度が左向き 10 [m/s] であるから，射出された装置 C の宇宙ステーションから見た速度は右向きに $20 - 10 = 10$ [m/s].

運動量保存則から射出前後における宇宙船 A と装置 C の運動量の和は一定であるから，

$$(10 + 2.5) \cdot 20 = 10 \cdot v_\mathrm{A} + 2.5 \cdot 10$$

よって $v_\mathrm{A} = 22.5$ [m/s].

同様に，射出の後，宇宙船 B に回収されるまでの装置 C と宇宙船 B の運動量の和は，回収後のそれらの和に等しいため，

$$2.5 \cdot 10 + 7.5 \cdot 20 = (2.5 + 7.5) \cdot v_\mathrm{B}$$

よって $v_\mathrm{B} = 17.5$ [m/s].

別解 ($v_\mathrm{A} = 22.5$ が求まったとして)　宇宙船 A，B および装置 C の運動量の総和は，装置 C の受け渡し以前において $(10 + 2.5 + 7.5) \cdot 20 = 400$ であった．これが受け渡し完了後においても一定に保たれることから，

$$400 = 10 \cdot v_\mathrm{A} + (7.5 + 2.5) \cdot v_\mathrm{B}$$

これに $v_\mathrm{A} = 22.5$ を代入して $v_\mathrm{B} = 17.5$ [m/s].

7.4 衝 突

1. **問題**　1 車線の水平な道路上で，2 台の乗用車が信号待ちの停車をしている．前方の乗用車 A の質量は $m_\mathrm{A} = 1.5$ [t]，後方の乗用車 B の質量は $m_\mathrm{B} = 2.5$ [t] である．その後方から，質量 $m_\mathrm{C} = 10$ [t] の居眠り運転のトラック C が時速 $v_\mathrm{C} = 40$ [km/h] で追突した．追突された乗用車 B はそのまま乗用車 A に追突し，その結果乗用車 A は時速 $v''_\mathrm{A} = 45$ [km/h] で交差点に飛び出した．トラックと乗用車 B の間，および乗用車 B と乗用車 A の間のはねかえりの係数は等しく e であるとする．

   激突は一瞬の出来事であり，地面との摩擦やブレーキによる減速効果は無視できる程度であるとして，e を求めよ．

   考え方　例題 7.5 の変形．片方の物体の衝突前の速度がゼロであることが既知である代わりにはねかえりの係数が未知数となっており，この衝突が二重になっている．衝突の計算が理解できていれば難しくはない．

   解答例　トラック C の乗用車 B への追突について，衝突前の運動量はトラック C が $m_\mathrm{C}v_\mathrm{C}$，乗用車 B が 0 である．衝突後のトラック C および乗用車 B の速度をそれぞれ v'_C，v'_B とすると，運動量保存則より，

$$m_\mathrm{C}v_\mathrm{C} = m_\mathrm{C}v'_\mathrm{C} + m_\mathrm{B}v'_\mathrm{B}. \tag{7.1}$$

   また，はねかえり係数が e なので，

$$v'_\mathrm{B} - v'_\mathrm{C} = ev_\mathrm{C} \tag{7.2}$$

   式 (7.2) より，$v'_\mathrm{C} = v'_\mathrm{B} - ev_\mathrm{C}$．これを式 (7.1) に代入して，

$$m_\mathrm{C}v_\mathrm{C} = (m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C})v'_\mathrm{B} - em_\mathrm{C}v_\mathrm{C}$$

   整理して，

$$v'_\mathrm{B} = (1+e)\frac{m_\mathrm{C}}{m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C}}v_\mathrm{C} \tag{7.3}$$

   乗用車 B による乗用車 A への追突においても，基本的な構図は全く同じであるため，式 (7.3) の変数を B→A，C→B と置き換えて，

$$v''_\mathrm{A} = (1+e)\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}v'_\mathrm{B} \tag{7.4}$$

   式 (7.3) を式 (7.4) に代入すると，

$$v''_\mathrm{A} = (1+e)^2\frac{m_\mathrm{B}m_\mathrm{C}}{(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})(m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C})}v_\mathrm{C} \tag{7.5}$$

   式 (7.5) に，$m_\mathrm{A} = 1.5, m_\mathrm{B} = 2.5, m_\mathrm{C} = 10, v_\mathrm{C} = 40, v''_\mathrm{A} = 45$ を代入すると，

$$45 = (1+e)^2\frac{2.5 \cdot 10}{4 \cdot 12.5} \cdot 40$$

   よって

$$(1+e)^2 = \frac{9}{4}$$

   より $e = 0.5$.

8　仕事・エネルギー・動力

8.1　仕 事

1. **問題**　Fig.8.1 に示すように，半径 r [m] の 1/4 円状の断面を持つなめらかな斜面の下に置かれた質量 m [kg] の物体にワイヤをつなげ，斜面上において水平に f [N] の力でワイヤを引いて物体をゆっくりと引っ張り上げることを考える．図に示すように物体の位置を角度 θ [rad] で表すとき，$\theta = \pi/3$ となる位置まで引き上げるのに要する仕事を求めよ．

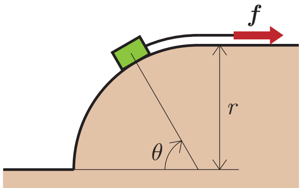


Fig. 8.1

考え方　物体が位置 x にあるときに物体に加えている力の運動方向成分が $f(x)$ とするとき，この位置からさらに微小距離 dx だけ動かすのに要する微小仕事を dW とすると，この微小な動きの間は力 f は一定と仮定できるので，

$$dW = f(x)dx$$

とみなせる．したがって，初期位置を x_0，終端位置を x_1 とすれば，その間の仕事量は

$$W = \int dW = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

として求まる．この問題では位置 x ではなく角度 θ で物体位置を指定しているので，角度を基準にして，位置を θ，力を $f(\theta)$ として考える必要がある．

解答例　Fig.8.2 に示すように，物体の位置が θ [rad] であるとき物体が受けている力は，ワイヤ張力 $\boldsymbol{f}'$ ($f = f'$)，重力 $m\boldsymbol{g}$，斜面から受ける垂直抗力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}$ であり，物体の動きがゆっくりであるとすれば，この 3 力は釣り合いの関係にある．

重力 $m\boldsymbol{g}$ を斜面に平行・垂直な方向に分解すると，斜面に平行な方向についてはワイヤ張力 f と $mg\cos\theta$ がつりあっている状態である．

したがって，角度 θ の状態から微小角度 $d\theta$ だけ持ち上げるのに要する微小仕事を dW とすると，

$$dW = f \cdot r d\theta = mgr\cos\theta \; d\theta$$

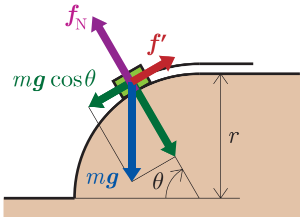


Fig. 8.2

である．

以上から，$\theta = 0$ から $\theta = \pi/3$ まで持ち上げるのに要する仕事は，

$$W = \int dW = \int_0^{\pi/3} mgr\cos\theta \; d\theta$$
$$= mgr\,[\sin\theta]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}mgr \text{ [J]}$$

となる．

8.2　エネルギー

1. **問題**　Fig.8.3 に示すように，半径 $r = 1$ [m]，質量 $m = 6$ [t] の球が，傾角 $\theta = 30$ [deg] の斜面上に静止しており，ある瞬間に滑ることなく転がり始めたとする．転がり摩擦や空気抵抗によるエネルギーロスを無視できるとし，重力加速度を $g = 10.0$ [m/s^2] として，以下の問いに答えよ．
   (1) 距離 $s = 14$ [m] 転がった瞬間において，球が喪失した位置エネルギーを求めよ．
   (2) 上記の瞬間において球が持っている運動エネルギーを求め，これを用いて球の中心の速さを求めよ．

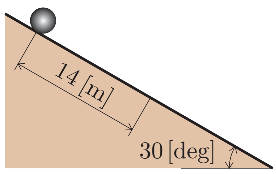


Fig. 8.3

考え方　エネルギーロスを無視するので，この系において力学的エネルギー保存則が成立する．すなわち，転がり落ちたことによる位置エネルギーの損失量がその時点における球の運動エネルギー量となっている．そしてその運動エネルギーは，並進運動と回転運動の運動エネルギーの和となっている．

球の並進運動の速さが v [m/s] とするとき，球の角速度を反時計回りに ω [rad/s] とすると，滑りがない条

件から $v = -r\omega$ が成り立つ．したがって回転の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2mr^2}{5}\cdot\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{5}mv^2$$

である．

解答例

(1) 滑り落ちる前後の高低差は $14\sin(\pi/6) = 7$ [m] であるから，位置エネルギー損失量は

$$mg\cdot 7 = 6000\cdot 10\cdot 7 = 420000 \text{ [J]} = 420 \text{ [kJ]}$$

である．

(2) エネルギー保存則から，喪失した位置エネルギー量は運動エネルギー量に等しい．このため，この瞬間における運動エネルギーは $mgs\sin(\pi/6)$ である．
この瞬間における球中心の並進速さを v [m/s] とし，角速度を図上反時計回りに ω [rad/s] とするとき，滑りがないことから $v = -r\omega$ である．したがって，運動エネルギー E_K を v で表すと，

$$E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v^2}{r^2}\right)^2$$
$$= \frac{7}{10}mv^2$$

以上から，

$$mgs\sin\frac{\pi}{6} = \frac{7}{10}mv^2$$

より，

$$v^2 = \frac{10}{7}gs\sin\frac{\pi}{6} = \frac{10}{7}\cdot 10\cdot 14\cdot\frac{1}{2} = 100$$

となり，$v = 10$ [m/s]．

9 摩 擦

9.1 すべり摩擦

1. **問題** なめらかではない水平面上で，質量 $m_\mathrm{A} = 20$ [kg] の物体 A を初速 $v_\mathrm{A} = 20$ [m/s] で滑らせ，距離 $d = 30$ [m] 離れた位置に静止している質量 $m_\mathrm{B} = 80$ [kg] の物体 B にまっすぐ衝突させた．物体 A，B と床面との動摩擦係数はともに $\mu = 0.5$ とし，反発係数は $e = 0.8$，重力加速度は 10.0 [m/s^2] とする．

(1) 衝突直前における物体 A の速度を求めよ．

(2) 衝突直後における物体 B の速度を求めよ．

(3) 物体 B が停止するまでの移動距離を求めよ．

考え方 動摩擦力は一定なので，等加速度運動である．したがって等加速度運動の式を用いて衝突直前の物体 A の速度は求まる．衝突については教科書の向心衝突の項目の内容をそのまま適用すれば衝突後の 2 物体の速度が計算できる．(3) についても等加速度運動として扱えばよい．

解答例

(1) 物体 A が受けている力は，鉛直下向きの重力 $m_\mathrm{A}\boldsymbol{g}$，鉛直上向きの垂直抗力 $\boldsymbol{R}$，運動方向に逆向きの動摩擦力 $\boldsymbol{F}'_\mathrm{A}$ である．上下に加速しないため，$\boldsymbol{R} = -m_\mathrm{A}\boldsymbol{g}$ であり，摩擦モデルから $F'_\mathrm{A} = \mu R = \mu m_\mathrm{A} g$ である．F'_A は一定であるため，物体 A は滑っている間，運動方向と逆向きの一定加速度を持つ．この加速度を a_A とすると，運動方程式から

$$-F'_\mathrm{A} = m_\mathrm{A}a_\mathrm{A}$$

よって $a_\mathrm{A} = -\mu g = -5$ [m/s^2] が求まる．
したがって動き出して t [s] までの進行距離は

$$x = v_\mathrm{A}t - \frac{5}{2}t^2$$

であり，衝突直前の時点で $x = d$ となる．ここに $d = 30$，$v_\mathrm{A} = 20$ を代入し，$t = 2, 6$ [s] を得る．$t = 6$ は無意味な解 (減速して停止した後逆向きに加速するという解) なので無視すると，衝突は 2 [s] 後である．
等加速度運動であるから，2 [s] 後の速度を v'_A とすると $v'_\mathrm{A} = 20 - 5\cdot 2 = 10$ [m/s]

(2) 衝突前の物体 A・B の運動量の合計は，物体 B が静止していることから

$$m_\mathrm{A}v'_\mathrm{A} = 20\cdot 10 = 200 \text{ [kg m/s]}$$

運動量保存則から，これが衝突後の運動量の和に等しいから，衝突直後の物体 A・B の速度をそれぞれ v''_A，v''_B とすると，

$$m_\mathrm{A}v''_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v''_\mathrm{B} = 20v''_\mathrm{A} + 80v''_\mathrm{B} = 200 \tag{9.1}$$

また，接近速度は $v'_\mathrm{A} = 10$ [m/s] であることから，離脱速度は

$$v''_\mathrm{B} - v''_\mathrm{A} = v'_\mathrm{A}\cdot e = 8 \text{ [m/s]} \tag{9.2}$$

式 (9.1) と式 (9.2) から，$v''_\mathrm{A} = -4.4$，$v''_\mathrm{B} = 3.6$ [m/s]．

(3) (1) と同様の議論から，衝突後の物体 B の加速度は $a_{\mathrm{B}} = -5$ [m/s^2] である．

i. 解法 1 (等加速度運動として扱う)
初速が v''_{B}，加速度が a_{B} の等加速度運動であるから，停止するまでの時間は $t_{\mathrm{B}} = v''_{\mathrm{B}}/a_{\mathrm{B}}$．したがって停止までの移動距離は

$$-\frac{1}{2}a_{\mathrm{B}}t_{\mathrm{B}}^2 = \frac{-a_{\mathrm{B}}}{2}\left(\frac{v''_{\mathrm{B}}}{a_{\mathrm{B}}}\right)^2 \fallingdotseq 1.30 \text{ [m]}$$

ii. 解法 2 (エネルギーの関係を利用する)
衝突直後の物体 B の運動エネルギーは

$$E_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v''^2_{\mathrm{B}}$$

である．また，摩擦力の大きさは $F_{\mathrm{B}} = \mu m_{\mathrm{B}} g$ [N] で一定であるから，停止するまでの距離を s_{B} [m] とすると，物体が停止するまでに摩擦力がする仕事は

$$W_{\mathrm{B}} = F_{\mathrm{B}} s_{\mathrm{B}}$$

この 2 つが等しいことから，

$$s = \frac{v''^2_{\mathrm{B}}}{2\mu g} \fallingdotseq 1.30 \text{ [m]}$$

2. **問題**　Fig.9.1 に示すように，古タイヤにロープをつけて引きずって走るトレーニングを考える．タイヤの質量を $m = 20$ [kg]，ロープと地面との角度を $\pi/6$ [rad]，ランニングの速さを 2 [m/s]，重力加速度を $g = 10.0$ [m/s^2] とする．

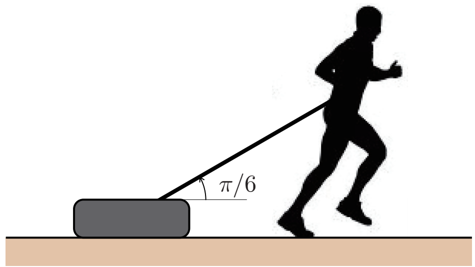
また，タイヤと地面との動摩擦係数は $\mu = \sqrt{3}$ として計算せよ．

(1) (a) 平地を走る場合，(b) 斜度 $\pi/6$ [rad] の心臓破りの坂を登る場合のそれぞれにおいて，ロープを引く力はどれほどでなければならないか．

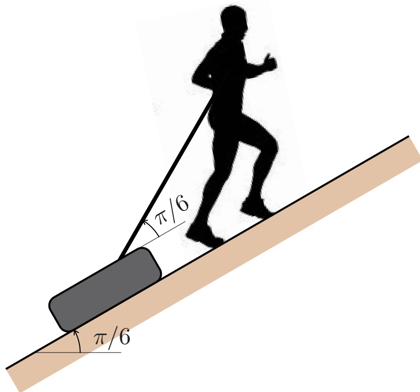
(2) (b) の場合，ランナーがタイヤに与える動力はどれほどか．

考え方　タイヤが受ける力は重力 $m\boldsymbol{g}$，ロープ張力 $\boldsymbol{T}$，摩擦力 $\boldsymbol{F}'$，地面からの垂直抗力 $\boldsymbol{R}$ の 4 つであり，等速度運動であるからこの 4 力が釣り合っている (Fig.9.2)．ただし，斜面を登る場合は重力が斜面後ろ向き成分を持つことに注意しなければならない．また，摩擦力の大きさは垂直抗力に摩擦係数を乗じたものとなる．

動力については，ランナーがタイヤを引く力 $\boldsymbol{T}$ の運動方向成分に速さを乗ずれば良い (内積の計算を用いれば $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}$ である)．



(a) 平地を走る場合



(b) 上り坂を走る場合

Fig. 9.1

解答例

(1) Fig.9.2 に示すとおり，タイヤにかかる力は重力，ロープ張力，地面からの垂直抗力および摩擦力である．(a)，(b) の場合におけるそれぞれの力を図のように記載する．タイヤは加減速しないため，それぞれの場合において，この 4 力はつりあいの関係にある．

(a) 平地を走る場合
まず鉛直方向の力を考えると，つりあい式は

$$T_{\mathrm{A}}\sin(\pi/6) + R_{\mathrm{A}} - mg = 0 \tag{9.3}$$

よって

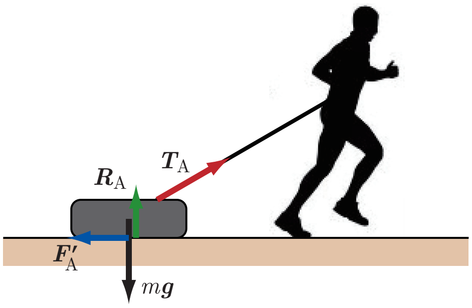
$$R_{\mathrm{A}} = mg - T_{\mathrm{A}}\sin\frac{\pi}{6}$$

次に水平方向の力のつりあい式は

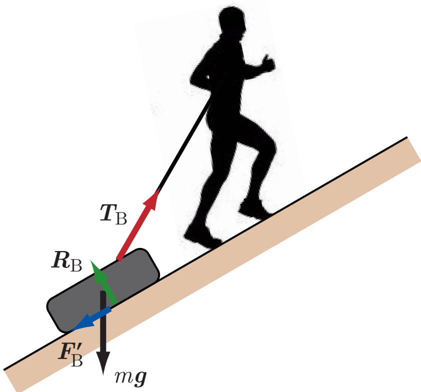
$$\begin{aligned} T_{\mathrm{A}}\cos\frac{\pi}{6} &= F'_{\mathrm{A}} \\ &= \mu R_{\mathrm{A}} \\ &= \mu(mg - T_{\mathrm{A}}\sin\frac{\pi}{6}) \end{aligned} \tag{9.4}$$

これに $mg = 200$，$\mu = \sqrt{3}$ を代入して解くと，$T_{\mathrm{A}} = 200$ [N] となる．

(b) 斜面を登る場合
斜面に平行な方向と垂直な方向を考える．重力 $m\boldsymbol{g}$ は，斜面への押しつけ力 (大きさ



(a) 平地を走る場合



(b) 上り坂を走る場合

Fig. 9.2

$mg\cos(\pi/6)$) と斜面に沿って下方向の力 (大きさ $mg\sin(\pi/6)$) に分解して考える．まず斜面に垂直な方向のつりあいを考えると，

$$T_{\mathrm{B}}\sin\frac{\pi}{6} + R_{\mathrm{B}} = mg\cos\frac{\pi}{6} \tag{9.5}$$

よって

$$R_{\mathrm{B}} = mg\cos\frac{\pi}{6} - T_{\mathrm{B}}\sin\frac{\pi}{6}$$

次に斜面に平行な方向のつりあいを考えると，

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{B}}\cos\frac{\pi}{6} &= mg\sin\frac{\pi}{6} + F'_{\mathrm{B}} \\
&= mg\sin\frac{\pi}{6} + \mu R_{\mathrm{B}} \\
&= mg\sin\frac{\pi}{6} + \\
&\quad \mu\left(mg\cos\frac{\pi}{6} - T_{\mathrm{B}}\sin\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$T_{\mathrm{B}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mu\sin\frac{\pi}{6}\right) = mg\left(\sin\frac{\pi}{6} + \mu\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

値を代入すると $T_{\mathrm{B}} = 400/\sqrt{3} \approx 231$ [N].

(2) 斜面を登るときの張力 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}$ の方向はタイヤの進行方向に対して $\pi/6$ [rad] の角度をなしている．したがって動力は

$$P = T_{\mathrm{B}}\cos\frac{\pi}{6}\cdot v = 400 \text{ [W]}$$