

工業力学 演習問題

茨城大学 工学部 知能システム工学科 井上 康介

Rev. 2012

全体に関して

回答は数値として行う。つまり、最終的な回答において $\sqrt{3}$ や $\sin \pi/3$ などが含まれてはならない。ただし、計算の誤差をできるだけ小さくするためには、最終回答の直前まではこれらの値を数値化せず、最終回答を行う時点においてこういった値を数値化すること。有効数字は指定のない限り3桁とする。

重力加速度は指定のない限り $g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ とする。

1 力

1.2 1点に働く力の合成と分解

- Fig.1.1 のように、 $f_1 \text{ [N]}$ の力と $f_2 \text{ [N]}$ の力が角度 $\pi/3 \text{ [rad]}$ をなして1点に作用している。これらの合力の大きさが $f \text{ [N]}$ で、その方向は f_1 に対して $\theta \text{ [rad]}$ をなすとするとき、 f および $\tan \theta$ を求めよ。

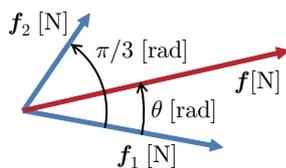


Fig. 1.1

1.3 力のモーメント

- Fig.1.2 に示すように、半径 30 [cm] の円板が中心を原点として xy 平面上に置かれている。図の通り x 軸から 30° をなす点 P において、 y 軸負の方向に 20 [kgf] の力を加えたとする。この力を原点 O に作用するものとして置き換えよ。

1.4 着点の異なる力の合成

- Fig.1.3 のように物体に複数の力がかかっている。これらの力を合成し、点 O に作用する一つの力と一つのモーメントとせよ。

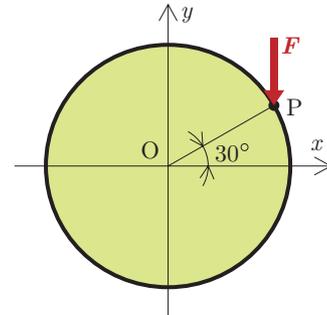


Fig. 1.2

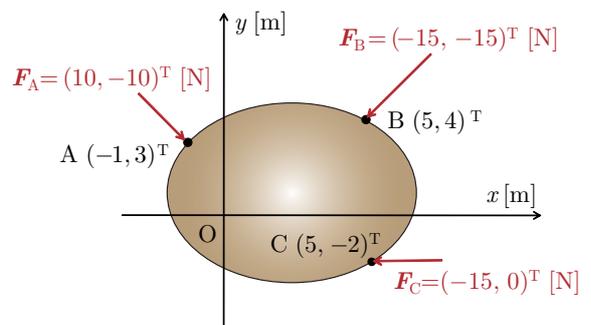


Fig. 1.3

2 力のつりあい

2.2 接触点、支点到働く力

- Fig.2.1 のように、軽くて質量の無視できる棒の先に 15 [kg] の物体をつるし、AB 間にワイヤを張って支える。ワイヤの耐えうる張力が 300 [N] までとしたとき、支えられるためには θ はどの範囲になければならないか。

ただし重力加速度は $g = 10.0 \text{ [m/s}^2\text{]}$ とする。

2.3 着点の異なる力のつりあい

- 水平に置かれた長さ 0.4 [m] の細い棒が両端で支えられており、Fig.2.2 の位置に 2 [N] 、 3 [N] の外力が鉛直下向きに作用している。

(1) 2つの外力の合力の大きさと作用線の位置を求

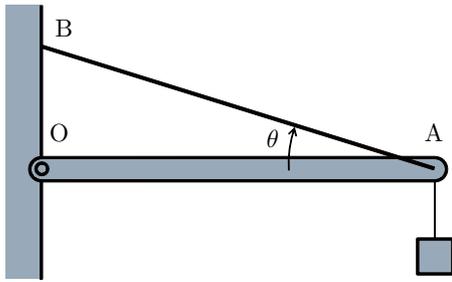


Fig. 2.1

- めよ .
 (2) 反力 R_1, R_2 [N] を求めよ .

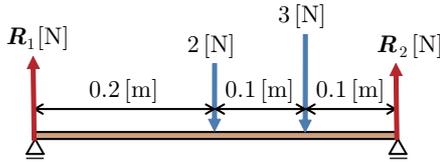


Fig. 2.2

2. Fig.2.3 に示すように、質量 $\sqrt{6}$ [kg] の棒 1 が角度 $\pi/4$ [rad] で傾き、質量 2 [kg] の棒 2 が角度 $\pi/3$ [rad] で傾いて支え合っているとす。棒の間に及ぼしあう力および地面からの反力をすべて求めよ。なお、接触面はすべてなめらかではないとし、棒の太さは無視できるとせよ。図中の寸法の単位は [m] である。ただし重力加速度は $g = 10.0$ [m/s²] とする。

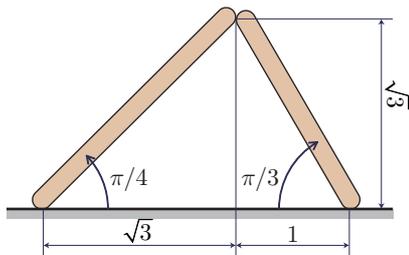


Fig. 2.3

3. Fig.2.4 のように長さ $l = 2$ [m]、質量 $m_1 = 1$ [kg] の細い棒が、半径 $r = 1$ [m]、質量 $m_2 = 2$ [kg] の円柱に立てかけられ、地面との間に角度 $\pi/3$ [rad] をなしている。棒と地面の間には摩擦があるが、円柱と棒、円柱と床や壁の間には摩擦がないとする。棒が円柱から受ける力を F 、棒が床から受ける反力を R_1 、円柱が床および壁から受ける力を R_2, R_3 とするとき、 R_1, R_2 [N] を求めよ。ただし重力加速度は $g = 10.0$ [m/s²] とする。

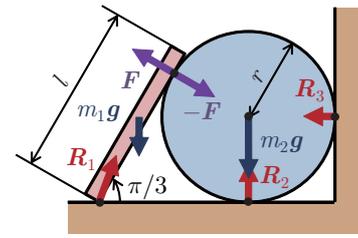


Fig. 2.4

2.4 トラス

1. Fig.2.5 のトラスに図の力を加えたとき、各部材の部材力を求めよ。

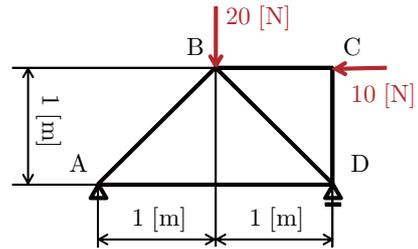


Fig. 2.5

2. Fig.2.6 は、1 辺が 10 [m] の正三角形形状構造を組み合わせて作られたトラスである。このトラスに図のように 4 力所で鉛直下向きの外力をかけたとき、部材 CI および CD の部材力はどれほどか。

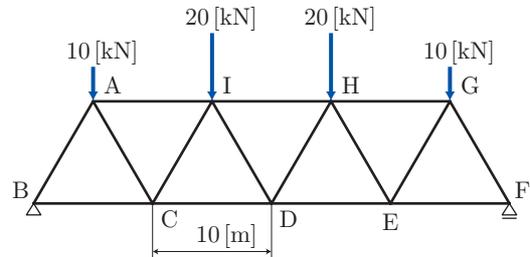


Fig. 2.6

3 重心

3.2 物体の重心

1. Fig.3.1 のように、1 辺の長さが $l, l/2$ の正方形をつなぎ合わせ、大きい正方形の中央に半径 r の円状の穴を開けた板があるとき、その重心位置を求めよ。
2. Fig.3.2 のように曲線 $y = -x^2 + 1$ と x 軸に囲まれた平面図形を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ。

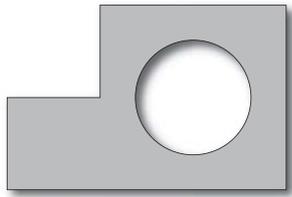


Fig. 3.1

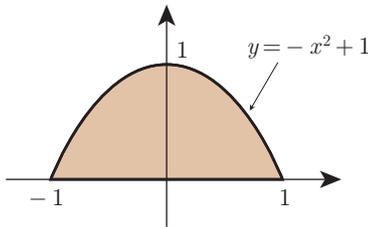


Fig. 3.2

3. 太さの無視できる長さ 40 [cm] のまっすぐな棒 AB があり、その線密度が一定でないとする。片側の端点 A から距離 x [cm] の位置の線密度は $2 + 0.15x$ [g/cm] であるとするとき、この棒の重心を求めよ。

3.3 物体のすわり

1. Fig.3.3 のように、1 辺が 1 [m] の正方形 OBCD から、直角三角形 OBA を切り取った形状の断面を持つ角柱があるとする。

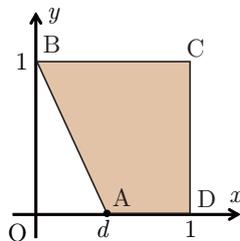


Fig. 3.3

- (1) 角柱の xy 平面上の重心座標を求めよ。
- (2) この角柱を水平な床に図の通りにおいたとき、安定の座りとなるための d [m] の範囲を求めよ。

6 剛体の運動

6.1 剛体の回転運動と慣性モーメント

1. 中心に回転軸のある円板がある。最初静止していたこの円板に 10 [Nm] のトルクを 5 [s] かけ続けた結果、5 [s] の間の総回転量が 25 回転であった。この円板の慣性モーメントを求めよ。

6.3 断面二次モーメント

1. 下図のような断面をもつ鉄骨があるとするとき、一点鎖線で示した回転軸周りの断面二次モーメントを求めよ。

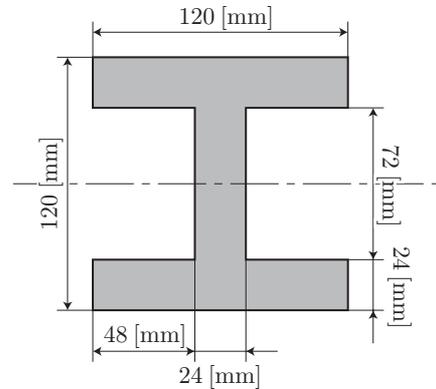


Fig. 6.1

この問題は、6.3 節における長方形板の慣性モーメントが分かっているとして解くこと。ただし、積分により長方形の慣性モーメントを求めても解くことはできる。

6.4 簡単な物体の慣性モーメント

1. 正方形と 2 等辺三角形を接合した Fig.6.2 のような厚みの無視できる板があるとする。

- (1) 板の重心 G の座標を求めよ。
- (2) 板を x 軸および y 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ求めよ。
- (3) 板の面密度を 2 [g/cm²] とする。 G を通り x 軸に平行な直線を L_x とするとき、 L_x まわりおよび y 軸まわりの板の慣性モーメント I_{Gx} 、 I_y を求めよ。

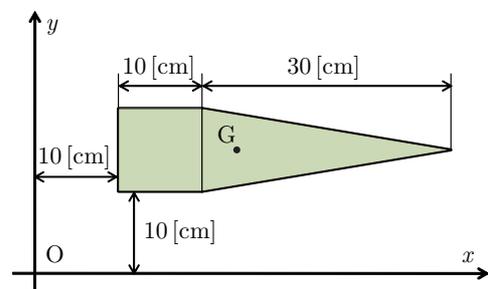


Fig. 6.2

2. Fig.6.3 のように放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 1$ とに囲まれた立体図形の形状をした物体を考える。長さ

の単位は [cm] とし，物体の密度は $2 \text{ [g/cm}^3]$ であるとする．

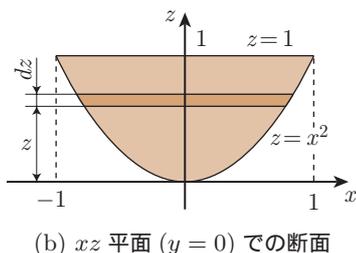
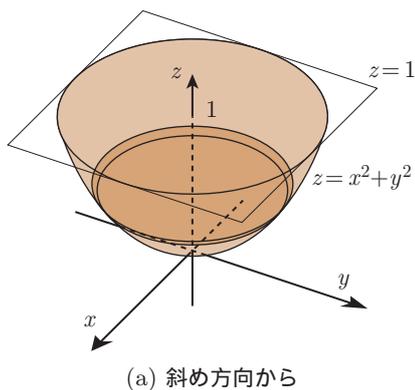


Fig. 6.3

- (1) xy 平面からの距離 z の位置に，厚み dz の微小部分をとるとき，微小部分の質量を求めよ．
- (2) 物体の重心位置を求めよ．
- (3) 物体の x 軸まわりの慣性モーメントを求めよ．

6.5 剛体の平面運動

1. Fig.6.4 のように，三輪車のハンドルを θ [rad] 切った状態で，前輪の速度が v [m/s] で進んでいるとする．車輪は横滑りせず，車輪の移動速度は車軸方向の成分を持たないと仮定する．

前輪の中心を A ，左右の後輪の中心を B, C とし，その中点を O とする．また，後輪の車軸と A との距離 (ホイールベース) を b [m]，中心軸と後輪中心の距離を w [m] とする．

- (1) 三輪車の運動の瞬間中心および左右の後輪の速度を求めよ．
- (2) 点 O の速度および角速度を求めよ．

6.6 剛体の平面運動の方程式

1. 無重力空間において，質量 100 [kg] ，半径 2 [m] の円板が 3 [rad/s] で回転しながら，その重心は x 軸方向に 2 [m/s] で進んでいる．ある瞬間に，円板の中心は座標 $(3, 3)^T \text{ [m]}$ にあった．このとき Fig.6.5 の点 A に 500 [N] の力を加えたとする．この瞬間の点 B の

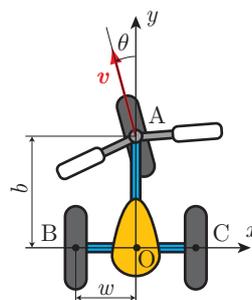


Fig. 6.4

速度・加速度を求めよ．

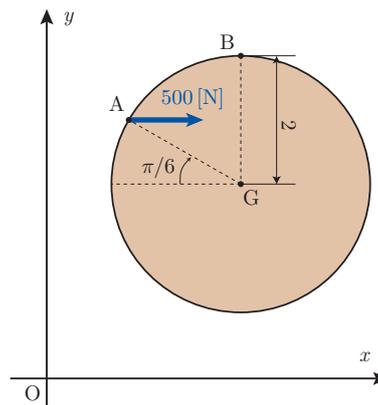


Fig. 6.5

2. Fig.6.6 のように傾斜 $\pi/6$ [rad] の坂の上に質量 $m = 20 \text{ [kg]}$ ，半径 $r = 1 \text{ [m]}$ の直円柱をおき，巻き付けたワイヤを $T = 300 \text{ [N]}$ の力で引っ張って持ち上げることを考える．斜面から受ける垂直抗力を R ，摩擦力を F とおく． x 軸を斜面上向きを正としてとるとき，円柱重心の加速度 $a \text{ [m/s}^2]$ を求めよ．

ただし，重力加速度は $g = 10.0 \text{ [m/s}^2]$ とする．

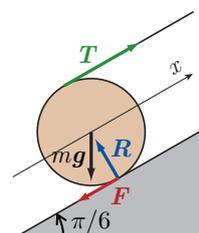


Fig. 6.6

3. Fig.6.7 に示すように，質量 $m_1 = 10 \text{ [kg]}$ ，半径 $r = 0.2 \text{ [m]}$ の円板状の滑車の軸に取り付けたワイヤから質量 $m_2 = 5 \text{ [kg]}$ の荷物を吊り下げ，滑車に回したワイヤの片方を天井に固定，他方を上向きに $F = 100$

[N] で引き上げたところ，滑車は上向きの加速度 a [m/s²] で加速した．この際，滑車に巻きつけたワイヤに滑りは生じなかったとする．このとき，天井につないだワイヤの張力 T [N] および加速度 a [m/s²] を求めよ．なお，重力加速度は $g = 10.0$ [m/s²] として計算せよ．

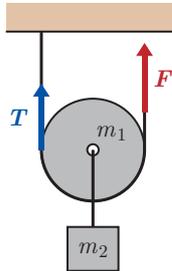


Fig. 6.7

6.7 回転体のつりあい

- Fig.6.8 に示すように，両端を軸受で固定した長さ 1 [m] の軸に，半径 40 [cm]，質量 30 [kg] の薄い円板と，質量 m_1, m_2 [kg] の小さな鉄球が取り付けられているとする．このとき，軸の静的および動的つりあいをとるには，質量 m_1, m_2 はどう与えるべきか求めよ．

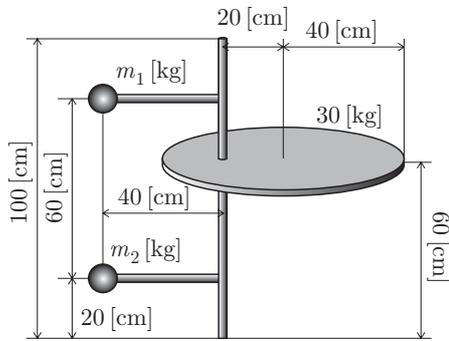


Fig. 6.8

7 衝突

7.1 運動量と力積

- 問題 滑らかな水平面上に静止している質量 20 [kg] の物体にロボットハンドによって水平な力を 2 [s] の間加えたところ，物体は等速直線運動をはじめた．この際ロボットハンドが物体に与えた力は Fig.7.1 に示す通り，時間を t [s] として，

$$f(t) = 4t - 2t^2 \text{ [N]} \quad (0 \leq t < 2)$$

であった．

- 2 [s] 後までに物体が受けた力積を求めよ．
- 2 [s] 後の時点で物体がもっている運動量の大きさを求め，それに基づいて以後の物体の運動の速さを求めよ．

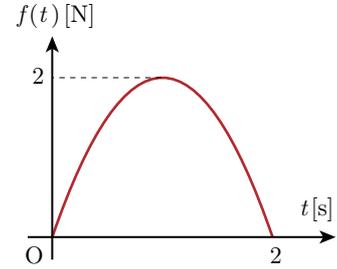


Fig. 7.1

7.2 角運動量

- 長さ $l = 40$ [mm]，幅 $w = 10$ [mm]，厚み $d = 3$ [mm]，密度 $\rho = 0.005$ [g/mm³] の板の端から 5 [mm] の位置に Fig.7.2 に示すように固定軸が取り付けられているとする．

板の中心線と x 軸とのなす角を θ [rad] とし，初期状態において板は $\theta = 0$ で静止していたとする．この軸に 2 [μNm] のトルクを 2 [s] の間かけた．

- 板が受けた角衝撃量を求めよ．
- 上の結果に基づき 2 [s] 後の板の角速度を求めよ．

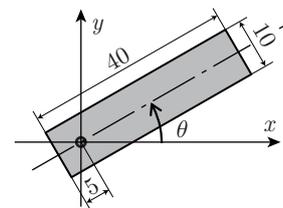


Fig. 7.2

7.3 運動量保存の法則

- Fig.7.3 に示すように，宇宙空間において同一直線上を慣性航行^{*1}する 2 隻の宇宙船 A, B があるとする．前方に行く宇宙船 A は質量 10 [t] であり，さらに質量 2.5 [t] の装置 C を載せている．一方，後方に行く宇宙船 B は質量が 7.5 [t] であるとする．

観測者のいる宇宙ステーションから見て，当初 2 隻の宇宙船の速度は双方とも，右向きに 20 [m/s] であった．

*1 ロケット噴射などを一切行わず，加速度 0 で航行すること



Fig. 7.3

ある時点において宇宙船 A は、搭載されたロボットアームを用いて装置 C を後ろ向きに射出した。このとき、射出された装置 C の速度は宇宙船 B から見て自分に向かって 10 [m/s] であった。その後、宇宙船 B は装置 C をロボットアームを使って回収し、内部に格納した。

装置 C の受け渡しの後において、宇宙船 A, B それぞれの宇宙ステーションから見た速度を求めよ。

7.4 衝突

- 1 車線の水平な道路上で、2 台の乗用車が信号待ちの停車をしている。前方の乗用車 A の質量は $m_A = 1.5 \text{ [t]}$ 、後方の乗用車 B の質量は $m_B = 2.5 \text{ [t]}$ である。その後方から、質量 $m_C = 10 \text{ [t]}$ の居眠り運転のトラック C が時速 $v_C = 40 \text{ [km/h]}$ で追突した。追突された乗用車 B はそのまま乗用車 A に追突し、その結果乗用車 A は時速 $v'_A = 45 \text{ [km/h]}$ で交差点に飛び出した。トラックと乗用車 B の間、および乗用車 B と乗用車 A の間のはねかえりの係数は等しく e であるとする。

衝突は一瞬の出来事であり、地面との摩擦やブレーキによる減速効果は無視できる程度であるとして、 e を求めよ。

8 仕事

8.1 仕事とその単位

- 1 Fig.8.1 に示すように、半径 $r \text{ [m]}$ の $1/4$ 円状の断面を持つなめらかな斜面の下に置かれた質量 $m \text{ [kg]}$ の物体にワイヤをつなげ、斜面上において水平に $f \text{ [N]}$ の力でワイヤを引いて物体をゆっくりと引っ張り上げることを考える。図に示すように物体の位置を角度 $\theta \text{ [rad]}$ で表すとき、 $\theta = \pi/3$ となる位置まで引き上げるのに要する仕事を求めよ。

8.2 エネルギー

- 1 Fig.8.2 に示すように、半径 $r = 1 \text{ [m]}$ 、質量 $m = 6 \text{ [t]}$ の球が、傾角 $\theta = 30 \text{ [deg]}$ の斜面上に静止しており、ある瞬間に滑ることなく転がり始めたとする。転がり摩擦や空気抵抗によるエネルギーロスを無視でき

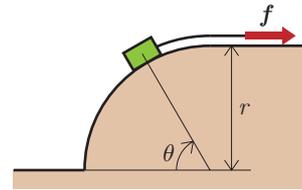


Fig. 8.1

るとし、重力加速度を $g = 10.0 \text{ [m/s}^2\text{]}$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) 距離 $s = 14 \text{ [m]}$ 転がった瞬間において、球が喪失した位置エネルギーを求めよ。
- (2) 上記の瞬間において球が持っている運動エネルギーを求め、これを用いて球の中心の速さを求めよ。

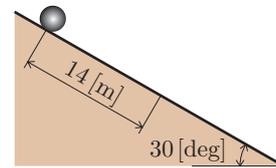


Fig. 8.2

9 摩擦

9.1 すべり摩擦

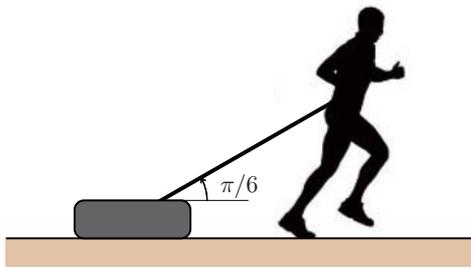
- 1 問題 なめらかではない水平面上で、質量 $m_A = 20 \text{ [kg]}$ の物体 A を初速 $v_A = 20 \text{ [m/s]}$ で滑らせ、距離 $d = 30 \text{ [m]}$ 離れた位置に静止している質量 $m_B = 80 \text{ [kg]}$ の物体 B にまっすぐ衝突させた。物体 A, B と床面との動摩擦係数はともに $\mu = 0.5$ とし、反発係数は $e = 0.8$ 、重力加速度は $10.0 \text{ [m/s}^2\text{]}$ とする。

- (1) 衝突直前における物体 A の速度を求めよ。
- (2) 衝突直後における物体 B の速度を求めよ。
- (3) 物体 B が停止するまでの移動距離を求めよ。

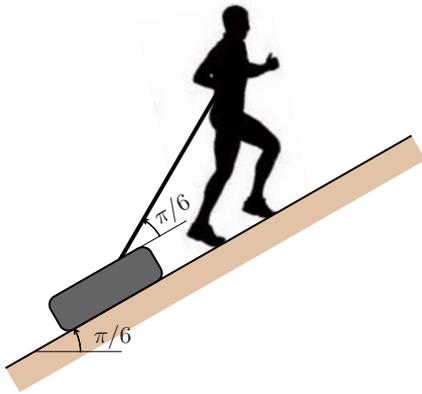
- 2 Fig.9.1 に示すように、古タイヤにロープをつけて引きずって走るトレーニングを考える。タイヤの質量を $m = 20 \text{ [kg]}$ 、ロープと地面との角度を $\pi/6 \text{ [rad]}$ 、ランニングの速さを 2 [m/s] 、重力加速度を $g = 10.0 \text{ [m/s}^2\text{]}$ とする。

また、タイヤと地面との動摩擦係数は $\mu = \sqrt{3}$ として計算せよ。

- (1) (a) 平地を走る場合、(b) 斜度 $\pi/6 \text{ [rad]}$ の心臓破りの坂を登る場合のそれぞれにおいて、ロープ



(a) 平地を走る場合



(b) 上り坂を走る場合

Fig. 9.1

を引く力はどれほどでなければならないか。

- (2) (b) の場合，ランナーがタイヤに与える動力はどれほどか。